



# Instituto Politécnico Nacional

Centro de Investigación y Desarrollo de Tecnología Digital

## Suficiencia del método de Fourier en el problema de digitalización de superficies tridimensionales

**Tesis**

Que para obtener el grado de  
**Maestría en Ciencias en Sistemas Digitales**

**Presenta**

Ing. Silvia Sofía Esquivel Hernández

**Directores**

Dr. Rigoberto Juárez Salazar

Dr. Víctor Hugo Díaz Ramírez

Tijuana, Baja California, México. Diciembre de 2023.

## **Dedicatoria**

A mis padres, mi familia, mis compañeros y mis asesores. Sin ustedes no hubiera sido posible.

## **Agradecimientos**

A mis padres, mis hermanos, mi sobrino Mateo David y mi familia, por su incondicional apoyo y confianza durante este proceso.

A mis directores de tesis: el Dr. Rigoberto Juárez Salazar y el Dr. Victor Hugo Díaz Ramíres, por su incondicional apoyo, confianza y todos los consejos compartidos.

A los miembros de mi comité tutorial: el Dr. Javier Eduardo Moreno Valenzuela, el Dr. Luis Tupak Aguilar Bustos y el Mtro. Andrés Calvillo Téllez, por todos los consejos recibidos.

A Jesús Abraham Rodríguez Arellano, por estar, apoyarme y siempre creer en mí, incluso en los momentos más difíciles.

A mis compañeros de posgrado, por todos sus sabios consejos, su apoyo y todos los momentos compartidos.

Al Centro de Investigación y Desarrollo de Tecnología Digital (CITEDI) del Instituto Politécnico Nacional por las oportunidades y recursos otorgados.

Al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT) por la beca otorgada para la realización del presente trabajo.

## Resumen

En la digitalización tridimensional, tanto la cámara como el proyector son considerados sensores de dirección, por lo cual es necesario estimar en qué pixel del plano imagen y del plano diapositiva está siendo captado o iluminado un punto en la escena. Los algoritmos actuales de digitalización por proyección de franjas se basan en la codificación de las coordenadas del plano diapositiva en señales cosenoidales, por lo cual el proceso de extracción de fase es fundamental para determinar las coordenadas del plano diapositiva que iluminan la escena. En el presente trabajo de investigación se presenta un análisis de las etapas del proceso de demodulación de fase por el método de Fourier, el cual tiene la característica de requerir un único patrón de franjas, haciendolo ideal para digitalizaciones dinámicas. La extracción de fase y su posterior desenvolvimiento, se comparan mediante simulación y de forma experimental.

***Palabras clave:*** Perfilometría por transformada de Fourier, extracción de fase envuelta, desenvolvimiento de fase, filtrado del espectro de primer orden.

## **Abstract**

In the three-dimensional digitalization process, both camera and projector are considered as direction sensors and, consequently, it is necessary to estimate in which pixel of the image and slide plane is being captured or illuminated a point of the scene. Current algorithms of fringe projection are based on encoding coordinates of the slide plane as cosenoidal patterns. Thus, phase extractions is a fundamental step to determine the coordinates of the slide plane that illuminate the scene. In this work, an analysis of every step of recovering phase using Fourier method is presented. This method has the characteristic of extrating phase from a single fringe pattern, which is excellent in dinamic digitalizations. Phase extraction and its unwrapping process are studied by simulations and experimentally.

**Keywords:** Fourier Transform Profilometry, wrapped phase estimation, phase unwrapping, first-order spectrum filtering.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>12</b>
1.1. Objetivos . . . . .	16
1.1.1. Objetivo general . . . . .	16
1.1.2. Objetivos específicos . . . . .	16
1.2. Publicaciones . . . . .	16
1.3. Organización del documento . . . . .	18
<b>2. Marco teórico</b>	<b>19</b>
2.1. Digitalización tridimensional . . . . .	19
2.1.1. Métodos temporales . . . . .	21
2.1.2. Métodos espaciales . . . . .	22
2.1.3. Coordenadas del plano diapositiva . . . . .	23
2.2. Extracción de fase envuelta . . . . .	23
2.2.1. Método de n-pasos . . . . .	23
2.2.2. Método de Fourier . . . . .	25
2.2.3. Filtrado del espectro de primer orden . . . . .	27
2.3. Desarrollamiento de fase . . . . .	31
2.3.1. Método de multifrecuencia . . . . .	31

2.3.2.	Rounding least-squares . . . . .	33
2.3.3.	Método de Fourier . . . . .	35
2.4.	Calibración del sistema . . . . .	37
2.4.1.	Modelo pinhole . . . . .	37
2.4.2.	Calibración . . . . .	38
2.4.3.	Calibración simultánea . . . . .	39
2.5.	Obtención de puntos tridimensionales . . . . .	42
2.5.1.	Algoritmos de triangulación . . . . .	43
<b>3.</b>	<b>Evaluación de la demodulación de fase</b>	<b>45</b>
3.1.	Simulación de la demodulación de fase . . . . .	45
3.1.1.	Evaluación de precisión . . . . .	46
3.1.2.	Robustez . . . . .	51
3.1.3.	Tiempo de procesamiento . . . . .	51
<b>4.</b>	<b>Evaluación de la digitalización tridimensional</b>	<b>55</b>
4.1.	Comparación experimental de digitalización . . . . .	55
<b>5.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>62</b>
<b>A.</b>	<b>Preliminares matemáticos</b>	<b>64</b>
A.1.	Operador homogéneo . . . . .	64
A.2.	Operador homogéneo inverso . . . . .	65
A.3.	Operador <i>floor</i> . . . . .	65
A.4.	Operador modulo . . . . .	66
A.5.	Operador de envolvimiento . . . . .	67



# Índice de figuras

2.1. Esquematización del problema de digitalización tridimensional por proyección de luz estructurada. . . . .	20
2.2. Proceso de digitalización tridimensional cuando el plano diapositiva es codificado por proyección de franjas. . . . .	21
2.3. Visualización de la codificación de la coordenada $\nu_x$ con el algoritmo de 4 pasos. . . . .	22
2.4. Diagrama de la estimación de $C$ utilizando correspondencias entre puntos en el plano de referencia $\rho_i$ y puntos en coordenadas pixel en el plano del dispositivo $\eta_i$ . . . . .	38
2.5. Esquematización del proceso de calibración de un dispositivo utilizando $i$ número de puntos en $k$ diferentes poses. . . . .	39
2.6. Descomposición de la imagen de entrada (a) según el modelo de color RGB. En (b) y (c) se muestran los canales rojo y azul, respectivamente. . . . .	40
2.7. Problema de triangulación cuando solamente se conocen las dos componentes del punto $\nu$ (generando un rayo de luz) o cuando solo se conoce la componente $\nu_x$ (generando un plano de luz que ilumina el objeto). . . . .	43

3.1.	(a)-(c) Funciones de fase propuestas, con las cuales se generan sus respectivos patrones de franjas (d)-(f). En (g)-(i) se observa la representación en el dominio de la frecuencia de los patrones de franjas generados. . . . .	47
3.2.	Errores de la demodulación de la primer función de fase $\phi_1$ . En la primer fila se muestran los errores RMS, mientras que en la segunda la desviación estándar de los errores, según los algoritmos de desenvolvimiento del método de fourier (a)(e), redondeo de mínimos cuadrados (b)(f), desenvolvimiento de campo completo [1] (c)(g) y desenvolvimiento basado en la ecuación de transporte de intensidad [2] (d)(h). . . . .	48
3.3.	Errores de la demodulación de la segunda función de fase $\phi_2$ . En la primer fila se muestran los errores RMS, mientras que en la segunda la desviación estándar de los errores, según los algoritmos de desenvolvimiento del método de fourier (a)(e), redondeo de mínimos cuadrados (b)(f), desenvolvimiento de campo completo [1] (c)(g) y desenvolvimiento basado en la ecuación de transporte de intensidad [2] (d)(h). . . . .	49

3.4.	Errores de la demodulación de la tercer función de fase $\phi_3$ . En la primer fila se muestran los errores RMS, mientras que en la segunda la desviación estándar de los errores, según los algoritmos de desenvolvimiento del método de fourier (a)(e), redondeo de mínimos cuadrados (b)(f), desenvolvimiento de campo completo [1] (c)(g) y desenvolvimiento basado en la ecuación de transporte de intensidad [2] (d)(h). . . . .	50
3.5.	Resultados de la prueba de robustez de la primer función de fase $\phi_1$ con los algoritmos de desenvolvimiento de Fourier (a), redondeo de mínimos cuadrados (b), campo completo (c) y el basado en la ecuación de transporte de intensidad (d). . . . .	52
3.6.	Resultados de la prueba de robustez de la segunda función de fase $\phi_2$ con los algoritmos de desenvolvimiento de Fourier (a), redondeo de mínimos cuadrados (b), campo completo (c) y el basado en la ecuación de transporte de intensidad (d). . . . .	53
3.7.	Resultados de la prueba de robustez de la tercer función de fase $\phi_3$ con los algoritmos de desenvolvimiento de Fourier (a), redondeo de mínimos cuadrados (b), campo completo (c) y el basado en la ecuación de transporte de intensidad (d). . . . .	53
3.8.	En (a) se aprecia la función de fase cuando $N = 2400$ pixeles, mientras que en (b) su correspondiente fase envuelta. . . . .	54
3.9.	Resultados de la evaluación del tiempo de procesamiento de los algoritmos de desenvolvimiento por transformada de Fourier y Rounding least-squares. . . . .	54

4.1.	Fases envueltas obtenidas con (a) el método temporal de n-pasos y (b) el método espacial por transformada de Fourier. . . . .	56
4.2.	En (a) se muestra el espectro de frecuencias del patrón de franjas utilizado para demodular fase por el método de Fourier, mientras que en (b) se muestra el espectro de primer orden filtrado. . .	57
4.3.	Coordenadas del plano diapositiva $\nu_x$ recuperadas a partir de las fases desenvueltas estimadas por los métodos de desenvolvimiento por (a) multifrecuencia, (b) transformada de Fourier, (c) Rounding least-squares, (d) Campo completo y (e) el basado en la ecuación de transporte de intensidad. . . . .	58
4.4.	Errores absolutos en la recuperación de las coordenadas del plano diapositiva $\nu_x$ a partir de las fases desenvueltas estimadas por los métodos de desenvolvimiento por (a) transformada de Fourier, (b) Rounding least-squares, (c) Campo completo y (d) el basado en la ecuación de transporte de intensidad. . . . .	59
4.5.	Objeto digitalizado empleando los métodos de desenvolvimiento por (a) multifrecuencia, (b) transformada de Fourier, (c) Rounding least-squares, (d) Campo completo y (e) el basado en la ecuación de transporte de intensidad. . . . .	60
4.6.	Errores en el objeto digitalizado empleando los métodos de desenvolvimiento por (a) transformada de Fourier, (b) Rounding least-squares, (c) Campo completo y (d) el basado en la ecuación de transporte de intensidad. . . . .	61

# Capítulo 1

## Introducción

Se puede entender por *digitalización tridimensional* como la obtención de una nube de puntos  $(x, y, z)$  de una escena observada. Inicialmente, el proceso de digitalización se dio por métodos por contacto, empleando máquinas con palpadores que se movían en una trayectoria conocida. Dado que los métodos por contacto resultaban muy invasivos, se comenzó a analizar la escena a partir de emplear longitudes de onda para poder medir el tiempo que esta tardaba en rebotar en el objeto de interés, tal como láseres, radiofrecuencia, ultrasónicas. Sin embargo, la capacidad de procesamiento de las computadoras modernas ha permitido el desarrollo de técnicas de digitalización sin contacto donde se capta y proyecta la luz a través de cámaras y proyectores digitales [3], dando origen a técnicas como la visión estéreo [4] y la proyección de luz estructurada.

La metrología óptica engloba todas aquellas técnicas donde se busca obtener un modelo 3D digital de la escena observada usando sistemas ópticos (cámaras o proyectores). Aquí, un rayo de luz proveniente del punto  $\mathbf{p}$  de la escena es captado por el sensor en el punto  $\beta$ , el cual se encuentra dentro del plano imagen del dispositivo situado a una longitud  $f$  de su sistema de referencia, es

decir

$$\mathcal{H}_f[\boldsymbol{\beta}] = \begin{bmatrix} \beta_x & \beta_y & f \end{bmatrix}^T. \quad (1.1)$$

Sin embargo, el dispositivo realiza una transformación adicional a un arreglo de pixeles, por lo que

$$\boldsymbol{\mu} = K\mathcal{H}[\boldsymbol{\beta}], \quad (1.2)$$

donde  $K$  es la matriz de parámetros intrínsecos. De esta manera, si se conoce la posición del dispositivo respecto a un sistema de referencia global es posible estimar  $\boldsymbol{p}$  como

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{t} + \lambda R K^{-1} \mathcal{H}[\boldsymbol{\mu}], \quad (1.3)$$

donde  $\lambda$  es un factor de escala,  $\boldsymbol{t}$  y  $R$  son el vector de traslación y la matriz de rotación, respectivamente; también conocidos como los parámetros extrínsecos. A partir de la ecuación 1.3 resulta evidente que se tienen 2 incógnitas ( $\lambda$  y  $\boldsymbol{p}$ ), por lo que se necesitan al menos dos dispositivos para poder digitalizar una escena tridimensional.

La visión estereo aborda el problema de digitalización al emplear al menos dos cámaras como sensores de dirección, cada una paralela a la otra pero separada por una distancia conocida a lo largo de un eje. En este enfoque, se trata de ubicar el pixel en cada cámara  $\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2$  en el cual fue captado el punto de la escena  $\boldsymbol{p}$ . Sin embargo, cuando la escena presenta una textura homogénea, el problema de asignación de correspondencias  $\boldsymbol{\mu}_1 \longleftrightarrow \boldsymbol{\mu}_2$  se dificulta, generando errores en la digitalización.

Los sistemas de proyección de luz estructurada (SPLE) están compuestos por al menos una cámara digital y un proyector como fuente de iluminación

dinámica. La principal característica de los SPLE es que emplean la cámara y el proyector como sensores de dirección [5]. De esta forma, los SPLE estiman las coordenadas de puntos en el espacio usando las direcciones en las que tal punto es observado por la cámara y el proyector del sistema. Este proceso de estimación solo requiere conocer las coordenadas del pixel en la imagen (cámara) en el que se registró el punto observado y las coordenadas del pixel en la diapositiva (proyector) que ilumina el punto observado. Cabe señalar que este proceso no es directo porque no se tiene acceso a las coordenadas pixel de la diapositiva una vez que la imagen ha sido capturada. Para obtener las coordenadas pixel del proyector a partir de las imágenes capturadas, los SPLE codifican el plano diapositiva e iluminan el objeto con el patrón resultante. De esta forma, las imágenes capturadas son procesadas para extraer (demodular) las coordenadas codificadas del plano diapositiva.

Inicialmente el plano diapositiva se codificó como una secuencia de franjas binarias (blanco y negro), de tal forma que cada pixel del plano diapositiva  $\nu$  tuviera un único código identificador. Sin embargo, el código binario requería de muchas imágenes para alcanzar a codificar grandes resoluciones. La codificación en escala de grises redujo el número de patrones necesario en grandes resoluciones puesto que se podía diseñar con  $M$  niveles de intensidad (en lugar de solo blanco y negro), pudiendo codificar en  $N$  patrones  $M^N$  franjas únicas. De igual manera, buscando reducir el número de patrones necesarios para codificar el plano diapositiva, apareció el método de corrimiento de fase (o *phase-shifting* en inglés). Este último consiste en utilizar una serie de patrones cosenoidales para asociar cada pixel del proyector a un valor de fase específico [6].

Aún cuando el plano diapositiva del proyector se puede codificar mediante diversas técnicas, el método de *corrimiento de fase* es ampliamente usado debido a su precisión y facilidad de implementación. Aunque se han propuesto diversos algoritmos para extraer fase, se tiene el inconveniente de que el rango de demodulación sin ambigüedad es  $(-\pi, \pi]$ , conocido como *valores principales*. Si la información codificada rebasa los valores principales aparecerán discontinuidades “sintéticas”, las cuales son introducidas por la periodicidad de las funciones trigonométricas. Por lo cual, es necesario eliminar dichas discontinuidades (desenvolvimiento) para poder realizar triangulación y obtener el modelo digital de la escena observada [7].

De entre los métodos propuestos para extraer y desenvolver la fase, resalta la implementación de la transformada de Fourier (FTP por sus siglas en inglés *Fourier transform profilometry*). A diferencia de otras técnicas, en la FTP solamente es necesario un único patrón de franjas para extraer fase [8, 9, 10]. Esto resulta interesante y novedoso para aquellas aplicaciones donde se requiera un análisis dinámico por digitalización de un objeto en la escena [11]. En cambio, la FTP presenta una alta susceptibilidad al ruido. Mucho se ha propuesto para aumentar su robustez, pero poco se ha reportado sobre las características de la escena y el sistema óptico experimental para su correcta implementación [12].

Considerando la amplia variedad de filtros para implementar el método FTP en este trabajo se exploran y analizan las características y propiedades que hacen útil el método de Fourier tanto para extraer fase envuelta como para realizar el desenvolvimiento de fase. La finalidad de este trabajo es establecer un marco teórico común que permita un mejor manejo de la transformada de Fourier en

los SPLE para reconstrucción de objetos 3D.

## **1.1. Objetivos**

### **1.1.1. Objetivo general**

El objetivo general del presente trabajo de tesis es analizar los fundamentos del método de Fourier para desarrollar un marco teórico suficiente para el desarrollo de algoritmos de extracción y desenvolvimiento de fase en el problema de digitalización de superficies tridimensionales.

### **1.1.2. Objetivos específicos**

Los objetivos específicos de esta tesis se enlistan a continuación.

- Conocer las ventajas y desventajas que aporta el método de Fourier para la obtención de fase y su correspondiente desenvolvimiento.
- Establecer las características de la escena para minimizar la susceptibilidad al ruido de la perfilometría por transformada de Fourier.
- Explorar las limitaciones geométricas del objeto para poder digitalizarlo con el método de Fourier.

## **1.2. Publicaciones**

A partir del presente trabajo de investigación, se obtuvieron aportaciones en 2 artículos de revista y 4 memorias de congreso. Estos se enlistan a continuación.

- Juárez-Salazar, R., Rodríguez-Reveles, G. A., Esquivel-Hernández, S., Díaz-Ramírez, V. H. (2023). Three-dimensional spatial point computation in fringe projection profilometry. *Optics and Lasers in Engineering*, 164, 107482.
- Juárez-Salazar, R., Esquivel-Hernández, S., Díaz-Ramírez, V. H. (2023). Are camera, projector, and camera–projector calibrations different?. *Applied Optics*, 62(22), 5999-6006.
- Juárez-Salazar, R., Esquivel-Hernández, S., Zheng, J., Díaz-Ramírez, V. H., Marrugo, A. G. (2023, October). Fringe projection profilometry without explicit projector calibration. In *Optics and Photonics for Information Processing XVII* (Vol. 12673, pp. 66-72). SPIE.
- Esquivel-Hernández, S., Juárez-Salazar, R., Díaz-Ramírez, V. H. (2023, October). First-order spectrum filtering in Fourier transform profilometry: a method comparison. In *Optics and Photonics for Information Processing XVII* (Vol. 12673, pp. 59-65). SPIE.
- Juárez-Salazar, R., Esquivel-Hernández, S., Zheng, J., Díaz-Ramírez, V. H. (2022, October). Stereo vision-based 3D pointer for virtual object interaction. In *Optics and Photonics for Information Processing XVI* (Vol. 12225, pp. 69-74). SPIE.
- Esquivel-Hernández, S., Mejía, C. I. G., Vargas, O. E. G., Juárez-Salazar, R., Gudiño-Lau, J. (2022, October). Visual localization of an omnidirectional robot using color detection by a multicamera system. In *Optics and Photonics for Information Processing XVI* (Vol. 12225, pp. 46-54). SPIE.

### 1.3. Organización del documento

El presente documento de tesis está organizado en 5 capítulos, como se describe a continuación. En el capítulo 2 se presentan los aspectos teóricos de los métodos analizados para el problema de obtención de fase envuelta y desenvolvimiento de fase; así la calibración y el algoritmo de triangulación implementado. En el capítulo 3, se detallan las pruebas mediante simulación de precisión, robustez a ruido gaussiano y tiempo de procesamiento de los algoritmos de demodulación de fase estudiados. Seguidamente, se construyó un perfilómetro con una cámara y un proyector digital, con el cual se digitalizó una figura continua. Los resultados de la parte experimental se encuentran en el capítulo 4. Finalmente, las conclusiones del presente trabajo de tesis se describen en el capítulo 5.

# Capítulo 2

## Marco teórico

### 2.1. Digitalización tridimensional

El problema de digitalización tridimensional consiste en ubicar un punto en el espacio a partir de conocer en qué dirección está siendo observado por mínimo dos dispositivos, obsérvese la Fig. 2.1. En el caso de la digitalización por proyección de luz estructurada, la escena está siendo observada por una cámara y un proyector. Como se conoce la ubicación (traslación y rotación) de los observadores respecto al sistema de referencia global, solo se debe determinar el pixel en el cual ha sido registrado el punto observado para reconstruir el rayo de luz con el que el proyector lo iluminó y el rayo de luz con el que la cámara lo detectó. En el caso de la cámara, esto resulta sencillo porque se tiene acceso al plano imagen. Por el contrario, en el caso del proyector resulta complejo porque el plano diapositiva está siendo proyectado en la escena y, por ende, no se tiene acceso a él.

Para resolver el problema de conocer el pixel del proyector que está iluminando el punto en la escena, se han propuesto diversos métodos de codificación

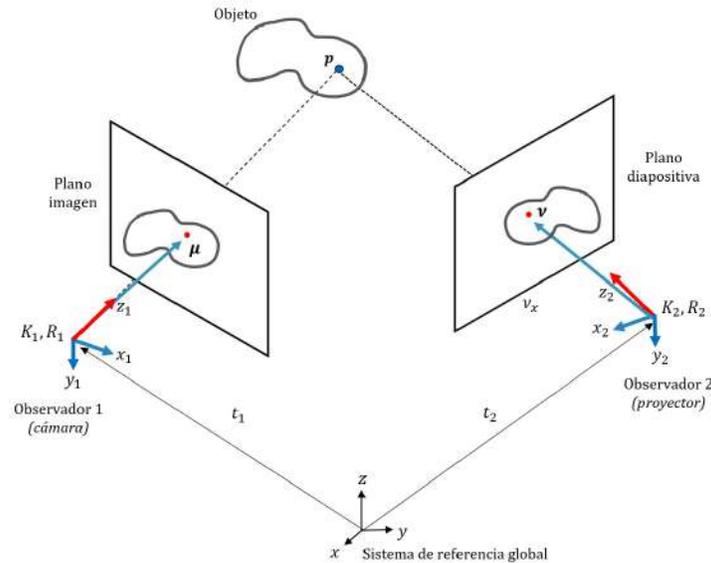


Figura 2.1: Esquematización del problema de digitalización tridimensional por proyección de luz estructurada.

del plano diapositiva [6], como el código binario [13], la escala de grises [14], los códigos de colores [15, 16] y funciones cosenoidales [17]. De entre estos, destaca el uso de funciones cosenoidales (proyección de franjas) para codificar los ejes coordenados  $(x, y)$  del plano diapositiva, debido a su alta precisión y facilidad de implementación. De esta manera, cuando el plano diapositiva está codificado en función de señales cosenoidales, las coordenadas  $\nu$  se recuperan a partir de dos etapas: obtención de fase envuelta y desenvolvimiento de fase (Fig. 2.2), las cuales se originan por la utilización de funciones trigonométricas. Además, la proyección de franjas puede ser una codificación temporal o espacial. En el presente trabajo, se estará analizando a fondo todos los aspectos de la utilización de la transformada de Fourier para digitalizar cuando el plano diapositiva se ha codificado de forma espacial con un patrón cosenoidal. Sin embargo, debido a que los resultados se estarán contrastando con la técnica de proyección de franjas temporales, a continuación, se describirán ambas técnicas.

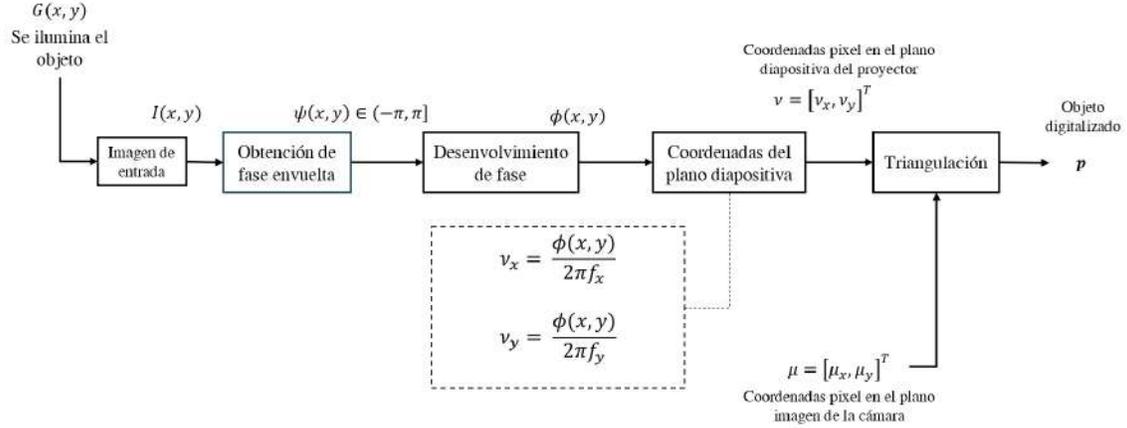


Figura 2.2: Proceso de digitalización tridimensional cuando el plano diapositiva es codificado por proyección de franjas.

### 2.1.1. Métodos temporales

Los métodos temporales de codificación del plano diapositiva (*Phase Shifting methods*), se caracterizan por introducir cambios de fase  $\delta$  conocidos a una señal cosenoidal de referencia, de esta manera cada pixel posee una única combinación de valores (Fig. 2.3). Esta forma de codificación pixel por pixel es robusta al color del objeto, posee una alta resolución espacial y es teóricamente inmune a la luz ambiental [7]; sin embargo, su eficiencia se ve afectada porque requiere al menos tres patrones para codificar un eje del plano diapositiva [17].

Considerando que las coordenadas del eje  $x$  se codifican en las rejillas

$$G_x(\boldsymbol{\nu}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\pi f_x \nu_x + \delta_x), \quad (2.1)$$

y el eje  $y$  en

$$G_y(\boldsymbol{\nu}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\pi f_y \nu_y + \delta_y), \quad (2.2)$$

donde  $f_x, f_y$  son las frecuencias espaciales y  $\delta_x, \delta_y$  los cambios de fase. Observe

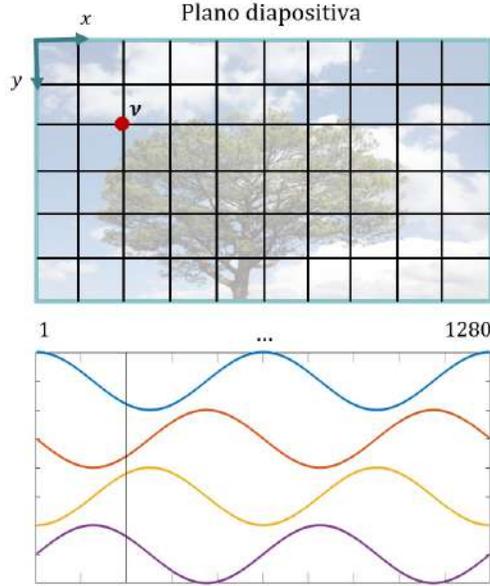


Figura 2.3: Visualización de la codificación de la coordenada  $\nu_x$  con el algoritmo de 4 pasos.

que al iluminar la escena con las rejillas  $G_x$ ,  $G_y$  es posible asignarle a cada pixel  $\nu$  un código único. Sin embargo, las coordenadas  $\nu$  en las que el proyector ve el punto en la escena  $\mathbf{p}$  se recuperan a partir de la demodulación de fase (obtención de fase envuelta y su posterior desenvolvimiento). En el presente trabajo, se utilizará el algoritmo de  $n$  pasos [17] como método de obtención de fase envuelta y el método de multifrecuencia [18] como método de desenvolvimiento temporal.

### 2.1.2. Métodos espaciales

Los métodos espaciales, a diferencia de los temporales, se caracterizan por demodular fase a partir de un único patrón de franjas  $I(x, y)$ , lo cual los hace ideales para reconstrucciones dinámicas. Dado que se conoce cuál es la transformada de Fourier de una señal cosenoidal, las demás componentes de frecuencias del orden 1 corresponden a la escena. A partir de aquí, es posible determinar en qué pixel  $\nu$  es visto el punto tridimensional  $\mathbf{p}$ . El proceso de obtención de

fase envuelta se encuentra en la sección 2.2, mientras que los algoritmos de desenvolvimiento a analizar se detallan en la sección 2.3.

### 2.1.3. Coordenadas del plano diapositiva

Una vez que se ha estimado la fase sin discontinuidades  $\phi(x, y)$ , las coordenadas del plano diapositiva se obtienen considerando que

$$\phi_x(x, y) = 2\pi f_x \nu_x \quad (2.3)$$

y

$$\phi_y(x, y) = 2\pi f_y \nu_y; \quad (2.4)$$

por lo tanto

$$\boldsymbol{\nu}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \begin{bmatrix} \phi_x(x, y)/f_x \\ \phi_y(x, y)/f_y \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

En el caso del método espacial, las coordenadas  $\boldsymbol{\nu}$  se estiman con la fase desenvuelta del conjunto de rejillas de más alta frecuencia.

## 2.2. Extracción de fase envuelta

A continuación, se describen los métodos de obtención de fase envuelta a estudiar.

### 2.2.1. Método de n-pasos

Considérese que se tiene un conjunto de  $n$  rejillas, ya sean  $G_x(\boldsymbol{\nu})$  o  $G_y(\boldsymbol{\nu})$ , las cuales fueron proyectadas sobre la escena. Cada imagen resultante se puede

escribir como

$$I_k(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos [\phi(x, y) + \delta_k], \quad (2.6)$$

donde  $a(x, y)$  es la luz de fondo,  $b(x, y)$  es la luz de modulación,  $\phi(x, y)$  es la fase a recuperar y  $\delta_k$  el  $k$ -ésimo  $k = 1, 2, \dots, n$  cambio de fase dado por

$$\delta_k = \frac{2\pi}{n}(k - 1). \quad (2.7)$$

Empleando la identidad trigonométrica  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ , la ecuación (2.6) se reescribe como

$$I_k(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos[\phi(x, y)] \cos(\delta_k) - b(x, y) \sin[\phi(x, y)] \sin(\delta_k). \quad (2.8)$$

A partir de la ecuación (2.8), es fácil ver que las imágenes de entrada se analizan como series Fourier, es decir

$$I(x, y) = c_1(x, y)f_1(k) + c_2(x, y)f_2(k) + c_3(x, y)f_3(k), \quad (2.9)$$

donde los datos conocidos son

$$f_1(k) = 1, \quad (2.10)$$

$$f_2(k) = \cos \delta_k, \quad (2.11)$$

$$f_3(k) = -\sin \delta_k, \quad (2.12)$$

mientras que las incógnitas son  $a(x, y)$ ,  $b(x, y)$  y  $\phi(x, y)$ , por lo que

$$c_1(x, y) = a(x, y), \quad (2.13)$$

$$c_2(x, y) = b(x, y) \cos[\phi(x, y)], \quad (2.14)$$

$$c_3(x, y) = b(x, y) \sin[\phi(x, y)]. \quad (2.15)$$

Finalmente, las funciones  $a(x, y)$ ,  $b(x, y)$  y  $\phi(x, y)$  se recuperan como

$$a(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I_k(x, y), \quad (2.16)$$

$$b(x, y) = \frac{2}{n} \sqrt{\left( \sum_{k=1}^n I_k(x, y) \sin \delta_k \right)^2 + \left( \sum_{k=1}^n I_k(x, y) \cos \delta_k \right)^2}, \quad (2.17)$$

$$\psi(x, y) = -\arctan \left( \frac{\sum_{k=1}^n I_k(x, y) \sin \delta_k}{\sum_{k=1}^n I_k(x, y) \cos \delta_k} \right). \quad (2.18)$$

Dada la periodicidad de la función  $\arctan$ ,  $\psi(x, y)$  se encuentra en el rango  $(-\pi, \pi]$ , por lo cual es necesario el proceso de desenvolvimiento para eliminar las discontinuidades y obtener  $\phi(x, y)$ . Posteriormente, se determinan las coordenadas  $\nu$  a partir de la función de fase desenvuelta  $\phi(x, y)$ .

### 2.2.2. Método de Fourier

Una imagen de un patrón de franjas se puede modelar como una función espacial en dos dimensiones [19], es decir

$$I(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos \left[ 2\pi(f_{0x}x + f_{0y}y) + \phi(x, y) \right], \quad (2.19)$$

donde  $a(x, y)$  es la luz de fondo,  $b(x, y)$  la amplitud,  $f_{0x}$  y  $f_{0y}$  son las frecuencias portadoras espaciales en los ejes  $x$  y  $y$ , respectivamente; y  $\phi(x, y)$  la fase. En este trabajo, las frecuencias portadoras fueron calculadas a partir de un único valor de frecuencia  $f$  y un ángulo  $\theta$  que determina la dirección de las franjas, como

$$f_{0x} = f \cos(\theta), \quad (2.20)$$

$$f_{0y} = f \sin(\theta). \quad (2.21)$$

Utilizando notación compleja, (2.19) se puede expresar como

$$I(x, y) = a(x, y) + \frac{1}{2}b(x, y) \exp[i\phi(x, y)] \exp[2\pi i(f_{0x}x + f_{0y}y)] \\ + \frac{1}{2}b(x, y) \exp[-i\phi(x, y)] \exp[-2\pi i(f_{0x}x + f_{0y}y)],$$

$$I(x, y) = a(x, y) + c(x, y) \exp[2\pi i(f_{0x}x + f_{0y}y)] + c(x, y)^* \exp[-2\pi i(f_{0x}x + f_{0y}y)], \quad (2.22)$$

donde  $*$  denota el complejo conjugado y  $c(x, y)$  es la amplitud compleja descrita como

$$c(x, y) = \frac{1}{2}b(x, y) \exp[i\phi(x, y)]. \quad (2.23)$$

Si la imagen  $I(x, y)$  se pasa al dominio de la frecuencia empleando la transformada de Fourier, entonces (2.22) se expresa como

$$\tilde{I}(f_X, f_Y) = A(f_X, f_Y) + C(f_X - f_{X0}, f_Y - f_{Y0}) + C^*[-(f_X + f_{X0}), -(f_Y + f_{Y0})], \quad (2.24)$$

considerando que las letras mayúsculas denotan la señal en el dominio de la

frecuencia de sus correspondientes en minúsculas de (2.22) y que  $f_{X0}$ ,  $f_{Y0}$  son las frecuencias portadoras a lo largo de los ejes  $x$  y  $y$ , respectivamente. A partir de  $\tilde{I}(f_X, f_Y)$ , se resuelve para  $\phi(x, y)$  primeramente asilando el espectro de primer orden  $C(f_X - f_{X0}, f_Y - f_{Y0})$  con un filtro en el dominio de la frecuencia y, al aplicar la transformada inversa de Fourier en 2D al espectro asilado se obtiene  $c(x, y)$ . Finalmente, la fase se calcula a partir de  $c(x, y)$  como

$$\psi(x, y) = \arctan \left\{ \frac{\Im[c(x, y)]}{\Re[c(x, y)]} \right\}, \quad (2.25)$$

donde  $\Im(\cdot)$  y  $\Re(\cdot)$  son operadores que devuelven la parte imaginaria y real de su entrada, respectivamente. Sin embargo, es importante mencionar que la fase obtenida hasta el momento  $\psi(x, y)$  están dentro del rango  $(-\pi, \pi]$  debido a la periodicidad de la función arco tangente. La fase sin discontinuidades  $\phi(x, y)$  se obtiene al aplicar un algoritmo de desenvolvimiento de fase.

### 2.2.3. Filtrado del espectro de primer orden

A grandes rasgos, el proceso de obtención de fase envuelta por transformada de Fourier se divide en tres grandes bloques: transformada de Fourier 2D del patrón de franjas deformado por la escena y capturado por la cámara, filtrado del espectro de primer orden en el dominio de la frecuencia, y transformada inversa de Fourier 2D de las frecuencias filtradas [9, 20]. De las etapas anteriores, la más crucial es el filtrado del espectro de primer orden. Esto se debe a que el filtro debe captar la mayor cantidad de información del espectro de primer orden, rechazando a la vez las frecuencias correspondientes al orden cero u otros espectros [21].

## Filtros de ventana

A continuación, se describirán los filtros [22, 23, 24] estudiados en términos de

$$d_1 = \sqrt{(f_X - f_{X1})^2 + (f_Y - f_{Y1})^2}, \quad (2.26)$$

y

$$d_2 = \sqrt{\frac{(f_X - f_{X1})^2}{s_x} + \frac{(f_Y - f_{Y1})^2}{s_y}}, \quad (2.27)$$

donde  $(f_{X1}, f_{Y1})$  es el centro del filtro, cuyo ancho y largo están determinados por los escalares  $s_x$  y  $s_y$ , respectivamente. Además, es importante considerar que la mayoría de los filtros a describir a continuación se diseñan con un valor de umbral  $m$ .

1. **Hanning.** El filtro Hanning es uno de los más implementados actualmente, se encuentra descrito como

$$W_1(f_X, f_Y) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi d_1}{m_1}\right) & \text{si } d_1 \leq m_1, \\ 0 & \text{otra manera.} \end{cases} \quad (2.28)$$

2. **Hamming.** El filtro Hamming se construye como

$$W_2(f_X, f_Y) = \begin{cases} \frac{27}{50} + \frac{23}{50} \cos\left(\frac{\pi d_1}{m_2}\right) & \text{si } d_1 \leq m_2, \\ 0 & \text{otra manera.} \end{cases} \quad (2.29)$$

3. **Cross-shaped Hanning.** Se trata de una variante del filtro Hanning,

descrita como

$$W_3(f_X, f_Y) = \max \left[ W_{3_a}(f_X, f_Y), W_{3_b}(f_X, f_Y) \right], \quad (2.30)$$

donde  $\max[.]$  es un operador que devuelve el valor más grande de sus entradas,

$$W_{3_a}(f_X, f_Y) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\pi d_a) & \text{si } d_a \leq 1, \\ 0 & \text{otra manera,} \end{cases} \quad (2.31)$$

$$W_{3_b}(f_X, f_Y) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\pi d_b) & \text{si } d_b \leq 1, \\ 0 & \text{otra manera,} \end{cases} \quad (2.32)$$

y

$$d_a = \sqrt{\frac{(f_X - f_{X1})^2}{m_a^2} + \frac{(f_Y - f_{Y1})^2}{(k_1 m_a)^2}}, \quad (2.33)$$

$$d_b = \sqrt{\frac{(f_X - f_{X1})^2}{(k_2 m_b)^2} + \frac{(f_Y - f_{Y1})^2}{m_b^2}}, \quad (2.34)$$

donde  $k_1 m_a$ ,  $k_2 m_b$  definen los ejes mayores y  $m_a$ ,  $m_b$  los ejes menores de las dos elipses, y

$$m_a = m_3 f \cos(\theta), \quad (2.35)$$

$$m_b = m_3 f \sin(\theta). \quad (2.36)$$

4. **Blackman.** El filtro Blackman está definido como

$$W_4(f_X, f_Y) = \begin{cases} \frac{21}{50} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi d_1}{m_4}\right) + \frac{2}{25} \cos\left(\frac{2\pi d_1}{m_4}\right) & \text{si } d_1 \leq m_4, \\ 0 & \text{otra manera.} \end{cases} \quad (2.37)$$

5. **Rectangular.** Es el filtro binario más básico, descrito como

$$W_5(f_X, f_Y) = \begin{cases} 1 & \text{si } d_2 \leq 1, \\ 0 & \text{otra manera.} \end{cases} \quad (2.38)$$

6. **Tukey.** El filtro Tukey es una variante del filtro rectangular, la cual presenta en los extremos una transición cosenoidal. Este filtro queda definido como

$$W_6(f_X, f_Y) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left[\pi\left(\frac{d_2 + \lambda - 1}{\lambda}\right)\right] & \text{si } 1 - \lambda < d_2 \leq 1, \\ 1 & \text{si } d_2 \leq 1 - \lambda, \\ 0 & \text{otra manera.} \end{cases} \quad (2.39)$$

donde  $\lambda \in (0, 1)$  es un escalar que determina porcentaje de transición del filtro en los bordes.

7. **Gaussian.** El filtro Gaussiano se construye como

$$W_7(f_X, f_Y) = \exp\left[-\frac{(f_X - f_{X1})^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(f_Y - f_{Y1})^2}{2\sigma_y^2}\right], \quad (2.40)$$

donde  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  son escalares que determinan el largo y ancho del filtro, respectivamente.

## 2.3. Desenvolvimiento de fase

Después de que se han procesado las patrones de franjas deformados se obtiene una distribución de fase  $\psi(x, y)$  o  $\psi(i, k)$  denominada fase envuelta. Sin embargo  $\psi(i, j)$  se encuentra en el rango  $[-\pi, \pi)$  radianes [25]. Por lo que, para obtener la distribución de fase  $\phi(i, j)$  que describe al objeto de interés se deben eliminar las discontinuidades de  $\psi(i, j)$  mediante el proceso de *desenvolvimiento de fase* [26].

A continuación, se describen 2 métodos de desenvolvimiento de fase espaciales, útiles para implementarse en la metrología por transformada de Fourier, y un método temporal.

### 2.3.1. Método de multifrecuencia

Si la frecuencia  $f_1$  del primer conjunto de rejillas  $G_1$  es

$$0 < f_1 \leq 1, \quad (2.41)$$

entonces las rejillas  $G_1$  poseen una franja, por lo que no se necesita desenvolvimiento, es decir

$$\psi_1(x, y) = \phi_1(x, y), \quad (2.42)$$

donde  $\psi_1$  es la fase envuelta y  $\phi_1$  la fase desenvuelta.

Sin embargo, aunque con una franja no se necesite el desenvolvimiento de fase, esta no es suficiente para captar todos los detalles de la escena. Por lo cual, un nuevo conjunto de rejillas  $G_2$  de mayor frecuencia espacial  $f_2$  es proyectada. En este caso, el algoritmo de obtención de fase envuelta regresará una función

de la forma

$$\psi_2(x, y) = \phi_2(x, y) - 2\pi h_2(x, y), \quad (2.43)$$

donde  $h_2(x, y)$  es una función de números enteros que determina los saltos entre periodos. Tomando en cuenta que las frecuencias espaciales  $f_1$  y  $f_2$  están relacionadas como

$$f_2 = \alpha_1 f_1, \quad (2.44)$$

donde  $\alpha_1 > 1$  es un multiplicador de frecuencia estimado según [18]; entonces las fases desenvueltas  $\phi_1$  y  $\phi_2$  están también relacionadas como

$$\phi_2(x, y) = \alpha_1 \phi_1(x, y). \quad (2.45)$$

Sustituyendo la ecuación (2.45) en (2.43) se tiene que

$$h_2(x, y) = \text{round} \left( \frac{\alpha_1 \phi_1(x, y) - \psi_2(x, y)}{2\pi} \right), \quad (2.46)$$

por lo que la fase desenvuelta está dada por

$$\phi_2(x, y) = \psi_2(x, y) + 2\pi h_2(x, y). \quad (2.47)$$

Este proceso se repite para procesar el conjunto de rejillas que codifican el eje  $y$  del plano diapositiva.

### 2.3.2. Rounding least-squares

Conforme al método de desenvolvimiento de fase propuesto en [27] y a la ecuación (A.13), la fase envuelta  $\psi(i, j) \in [-\pi, \pi)$  se puede modelar como

$$\psi(i, j) = \phi(i, j) - 2\pi k(i, j), \quad (2.48)$$

donde  $\phi(i, j)$  es la fase desenvuelta a ser recuperada y  $k(i, j)$  es una función de valores enteros.

Considerando el gradiente de la ecuación (2.48), se tiene que

$$\text{round}\left(\frac{1}{2\pi}\nabla\psi(i, j)\right) = \text{round}\left(\frac{1}{2\pi}\nabla\phi(i, j) - \nabla k(i, j)\right), \quad (2.49)$$

$$= \text{round}\left(\frac{1}{2\pi}\nabla\phi(i, j)\right) - \nabla k(i, j), \quad (2.50)$$

donde  $\text{round}(\cdot)$  es un operador que devuelve el número entero más cercano de la entrada y  $\nabla k(i, j)$ , al igual que  $k(i, j)$ , está conformada por números enteros. La expresión (2.50) se puede resolver para  $\nabla k(i, j)$  al considerar que cumple con la condición de muestreo de Nyquist,

$$|\nabla\phi(i, j)| < \pi, \quad (2.51)$$

entonces  $|\nabla\phi(i, j)/(2\pi)|$  es menor a 1/2 y, al aplicar el operador de redondeo, equivale a cero. Por lo tanto

$$\nabla k(i, j) = -\text{round}\left(\frac{1}{2\pi}\nabla\psi(i, j)\right). \quad (2.52)$$

De esta manera, es posible estimar  $k(i, j)$  a partir de  $\nabla k(i, j)$  al minimizar

$$\min\{\|k_x - \tilde{k}L_x^T\|_F^2 + \|k_y - L_y\tilde{k}\|_F^2\}, \quad (2.53)$$

donde  $\|\cdot\|_F$  denota la norma de Frobenious;  $L_x$  y  $L_y$  se describen en (2.64), (2.65), respectivamente;  $k_x = \partial k(i, j)/\partial x$ ,  $k_y = \partial k(i, j)/\partial y$ ; y  $\tilde{k}$  es la función a aproximar.

Al diferenciar (2.53) respecto a  $\tilde{k}$  se obtiene

$$A\tilde{k} + \tilde{k}B = C, \quad (2.54)$$

donde  $A = L_y^T L_y$ ,  $B = L_x^T L_x$  y  $C = L_y^T k_y + k_x L_x$ . Para estimar  $\tilde{k}$  a partir de (2.54), primeramente se descompone  $B$  en sus valores singulares

$$B = U\Sigma V^T, \quad (2.55)$$

generando la expresión

$$A\tilde{k}U + \tilde{k}BU = CU. \quad (2.56)$$

Multiplicando el término  $\tilde{k}BU$  por la matriz identidad  $I = UU^T$ , se tiene

$$A\tilde{k}U + \tilde{k}BU = CU, \quad (2.57)$$

o

$$AK + K\Sigma = D, \quad (2.58)$$

donde  $K = \tilde{k}U$  y  $D = CU$ . Las columnas de la matriz  $K = [k_1, k_2, \dots, k_N]$  se

estiman como

$$ki = (A + \sigma_i I)^{-1} d_i, \quad (2.59)$$

considerando que  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $d_i$  son las columnas de la matriz  $D$  y  $\sigma_i$  los valores singulares de la matriz diagonal  $\Sigma$ .

Finalmente,

$$\tilde{k} = \text{round}(KU^T), \quad (2.60)$$

y la fase desenvuelta se calcula como

$$\phi(i, j) = \psi(i, j) + 2\pi\tilde{k}. \quad (2.61)$$

### 2.3.3. Método de Fourier

En el algoritmo propuesto en [28, 10], el problema de desenvolvimiento de fase se aborda minimizando

$$\min \|\mathcal{W}[\nabla\psi(i, j)] - \nabla\phi(i, j)\|_p, \quad (2.62)$$

donde  $\|\cdot\|_p$  denotan la norma Euclideana  $p$  y

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} \partial f / \partial x \\ \partial f / \partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f L_x^T \\ L_y f \end{bmatrix}, \quad (2.63)$$

considerando que  $[\cdot]^T$  es la transpuesta,  $L_x$  y  $L_y$  dos matrices que aproximan las primeras diferencias definidas como

$$L_x = \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{0}}_{N-1} & \mathbb{I}_{(N-1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{(N-1)} & \vec{\mathbf{0}}_{N-1} \end{bmatrix}, \quad (2.64)$$

$$L_y = \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{0}}_{M-1} & \mathbb{I}_{(M-1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{(M-1)} & \vec{\mathbf{0}}_{M-1} \end{bmatrix}, \quad (2.65)$$

siendo  $\vec{\mathbf{0}}_a$  un vector de  $a \times 1$  con todas sus entradas iguales a cero y  $\mathbb{I}_a$  la matriz identidad de tamaño  $a \times a$ .

Específicamente, el desenvolvimiento de fase utilizando la transformada de Fourier es un caso especial cuando  $p = 2$ , por lo que (2.62) se reduce a la ecuación de Poisson. Es decir,

$$(\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}) + (\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}) = \rho_{i,j}, \quad (2.66)$$

donde

$$\rho_{i,j} = (\Delta_{i,j}^x - \Delta_{i-1,j}^x) + (\Delta_{i,j}^y - \Delta_{i,j-1}^y), \quad (2.67)$$

$$\Delta_{i,j}^x = \mathcal{W}[\tilde{\psi}_{i+1,j} - \tilde{\psi}_{i,j}], \quad (2.68)$$

$$\Delta_{i,j}^y = \mathcal{W}[\tilde{\psi}_{i,j+1} - \tilde{\psi}_{i,j}], \quad (2.69)$$

y

$$\tilde{\psi}_{i,j} = \begin{cases} \psi_{i,j} & (0 \leq i \leq M, 0 \leq j \leq N) \\ \psi_{2M-i,j} & (M < i \leq 2M, 0 \leq j \leq N) \\ \psi_{i,2N-j} & (0 \leq i \leq M, N < j < 2N) \\ \psi_{2M-i,2N-j} & (M < i < 2M, N < j < 2N) \end{cases}. \quad (2.70)$$

Debido a que  $\rho_{i,j}$  es periódica, se calcula su transformada de Fourier  $P_{m,n}$

dentro de los límites  $0 \leq i < 2M$  y  $0 \leq j < 2N$ , por lo que

$$\Phi_{m,n} = \frac{P_{m,n}}{2 \cos(\pi m/M) + 2 \cos(\pi n/N) - 4}, \quad (2.71)$$

donde  $\Phi_{m,n}$  es la transformada de Fourier de  $\tilde{\phi}_{i,j}$ . La fase desenvuelta deseada  $\phi(i,j)$  se obtiene al calcular la transformada de Fourier inversa de  $\Phi_{m,n}$  y restringir la respuesta entre  $0 \leq i \leq M$  y  $0 \leq j \leq N$ .

## 2.4. Calibración del sistema

Una vez que se tienen las coordenadas del plano imagen y del plano diapositiva, es importante conocer la posición de los dispositivos respecto a un sistema de referencia global, para poder implementar un algoritmo de triangulación. En esta sección se describe el proceso de calibración implementado, el cual está basado en el uso de patrones en dos dimensiones (2D).

### 2.4.1. Modelo pinhole

En el modelo pinhole, un punto en el espacio  $\mathbf{p} = [p_x \ p_y \ p_z]^T$  es captado en el plano del dispositivo como

$$\boldsymbol{\eta} = \mathcal{H}^{-1} \left[ C \mathcal{H}[\mathbf{p}] \right], \quad (2.72)$$

donde  $\mathcal{H}$  es el operador homogéneo y  $\mathcal{H}^{-1}$  el operador homogéneo inverso descritos en [29]; y  $C$  es la matriz del dispositivo dada por

$$C = K \begin{bmatrix} R^T & -R^T \mathbf{t} \end{bmatrix}, \quad (2.73)$$

donde  $K$  es la matriz de parámetros intrínsecos,  $R$  define su rotación y  $\mathbf{t}$  su traslación [30]. Un caso particular de la matriz  $C$  resulta cuando el sistema de referencia del dispositivo coincide, tanto en orientación como en traslación, con el sistema de referencia global. De esta manera, se dice que el dispositivo está *centrado*, provocando que  $R$  sea la matriz identidad de  $3 \times 3$  y  $\mathbf{t}$  un vector de ceros de  $3 \times 1$ .

### 2.4.2. Calibración

El método de calibración implementado asume que tanto la cámara como el proyector se pueden modelar como *pinhole*. Aquí se busca estimar la matriz  $C$  (2.73), conociendo de antemano  $i$  cantidad de puntos en el espacio tridimensional  $\mathbf{p}_i$  y sus correspondientes en el plano del dispositivo  $\boldsymbol{\eta}_i$ , obsérvese la fig. 2.4.

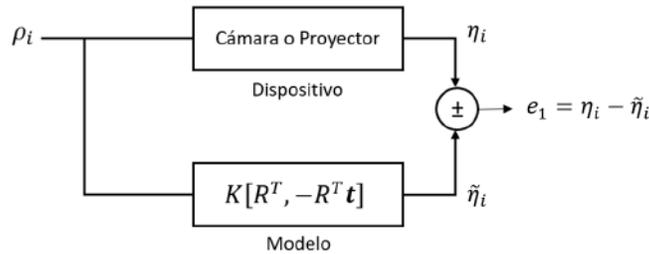


Figura 2.4: Diagrama de la estimación de  $C$  utilizando correspondencias entre puntos en el plano de referencia  $\boldsymbol{\rho}_i$  y puntos en coordenadas pixel en el plano del dispositivo  $\boldsymbol{\eta}_i$ .

La calibración se simplifica aún más cuando se considera que los puntos  $\mathbf{p}_i$  son coplanares en  $xy$ , entonces

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\rho}_1 &= \begin{bmatrix} p_{x1} & p_{y1} & 0 \end{bmatrix}^T, \\
 \boldsymbol{\rho}_2 &= \begin{bmatrix} p_{x2} & p_{y2} & 0 \end{bmatrix}^T, \\
 &\vdots \\
 \boldsymbol{\rho}_i &= \begin{bmatrix} p_{xi} & p_{yi} & 0 \end{bmatrix}^T.
 \end{aligned} \tag{2.74}$$

De esta manera, el proceso de formación de imágenes descrito en (2.72) se reescribe como

$$\boldsymbol{\eta}_i = \mathcal{H}^{-1} \left[ G\mathcal{H}[\boldsymbol{\rho}_i] \right], \quad (2.75)$$

donde  $G$  es una matriz homografía no singular dada por

$$G = KR^T \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \mathbf{s} - \mathbf{t} \end{bmatrix}, \quad (2.76)$$

considerando que el plano de referencia se encuentra descrito por las dos primeras columnas de su matriz de rotación  $\mathbf{q}_1$ ,  $\mathbf{q}_2$  y su vector de posición  $\mathbf{s}$ . Una vez que se obtiene al menos tres matrices  $G$ , se puede determinar los parámetros intrínsecos del dispositivo. Sin embargo, se obtiene una matriz  $R$  y un vector  $\mathbf{t}$  por cada  $k$ -ésima configuración, obsérvese la fig. 2.5. Los algoritmos para obtener los parámetros intrínsecos  $K$  y extrínsecos  $(R, \mathbf{t})$  del dispositivo se detallan en el apéndice B de [29].

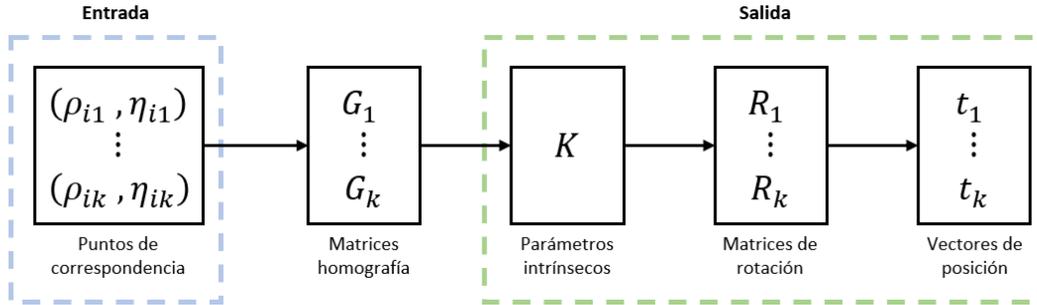


Figura 2.5: Esquemmatización del proceso de calibración de un dispositivo utilizando  $i$  número de puntos en  $k$  diferentes poses.

### 2.4.3. Calibración simultánea

Aunque el método de calibración previo es computacionalmente sencillo de implementar, en la práctica resulta tedioso porque se necesita repetir 2 veces el

proceso descrito en la fig. 2.5. Para calibrar el sistema cámara-proyector a partir de un solo conjunto de imágenes, se explota la descomposición de estas en los canales rojo, verde y azul. De esta manera, para obtener las correspondencias  $(\rho, \mu)$  se caracteriza el plano de referencia con un patrón de ajedrez amarillo, mientras que el plano diapositiva del proyector es proyectado encima como un patrón de ajedrez cian [31]. La descomposición en el modelo de color RGB de una imagen de los patrones superpuestos se encuentra en la fig. 2.6, donde se aprecia que en el canal azul se observa el plano de referencia y en el rojo el plano diapositiva.

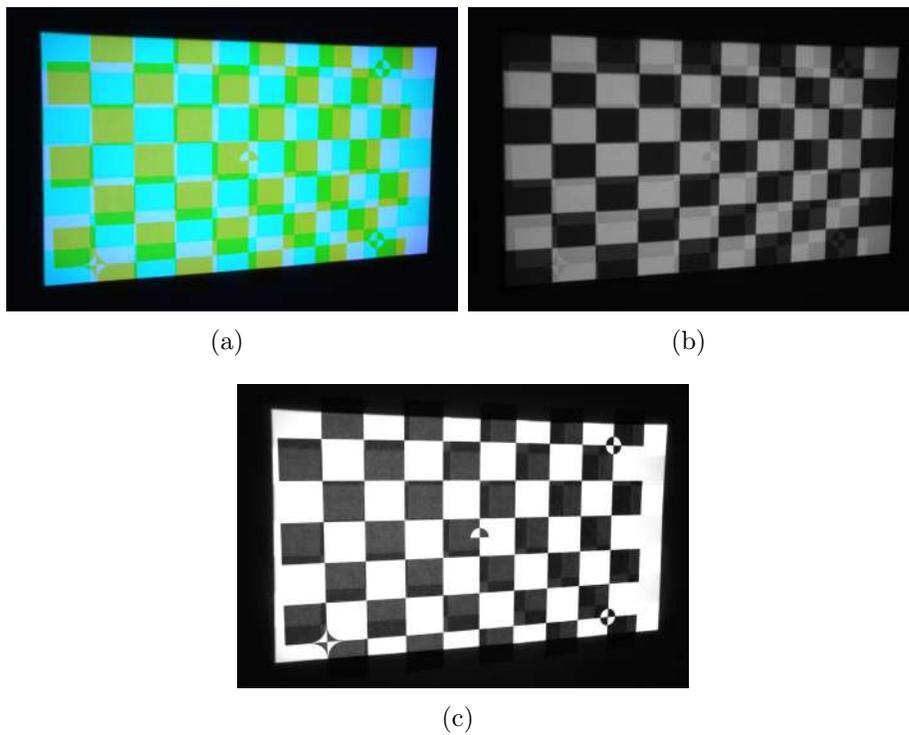


Figura 2.6: Descomposición de la imagen de entrada (a) según el modelo de color RGB. En (b) y (c) se muestran los canales rojo y azul, respectivamente.

A continuación se describen el proceso para conocer los parámetros intrínsecos y extrínsecos de cada dispositivo utilizando un único conjunto de imágenes.

1. **Estimación de las homografías de la cámara  $G_{c_k}$ .** Utilizando la información del canal azul se obtienen puntos pixel en el plano imagen del k-ésimo conjunto  $\boldsymbol{\mu}_{i,k}$  y se asocian a sus correspondientes en el plano de referencia  $\boldsymbol{\rho}_{i,k}$ . Con esta información, se estima una matriz homografía  $G_{c_k}$  para cada k-ésimo conjunto de imágenes utilizando en el apéndice A de [29].
2. **Matrices homografía del proyector  $G_{p_k}$ .** Aunque el patrón cyan que caracteriza el plano diapositiva es recuperado en el canal rojo, no es posible relacionar directamente puntos pixel  $\boldsymbol{\nu}_{i,k}$  con sus correspondientes  $\boldsymbol{\rho}_{i,k}$ . En su lugar, se construyen matrices homografía  $G_k$  que relacionan el i-ésimo pixel del plano diapositiva con su correspondiente en el plano imagen en la k-ésima pose, es decir

$$\boldsymbol{\mu}_{i,k} = \mathcal{H}^{-1} \left[ G_k \mathcal{H} [\boldsymbol{\nu}_{i,k}] \right], \quad (2.77)$$

donde  $G_k = G_{c_k} G_{p_k}^{-1}$ . Por consiguiente, utilizando las matrices  $G_{c_k}$  obtenidas en el punto uno, las homografías  $G_{p_k}$ , que transforman puntos en el plano de referencia  $\boldsymbol{\rho}_{i,k}$  a sus correspondientes en el plano diapositiva  $\boldsymbol{\nu}_{i,k}$ , se estiman como

$$G_{p_k} = G_k^{-1} G_{c_k}. \quad (2.78)$$

3. **Obtención de los parámetros intrínsecos y extrínsecos de los dispositivos.** Los parámetros intrínsecos y extrínsecos de la cámara y el proyector son estimados utilizando  $G_{c_k}$  y  $G_{p_k}$ , respectivamente. Los algoritmos empleados se detallan en el apéndice B de [29].

## 2.5. Obtención de puntos tridimensionales

Considere que un pixel  $\boldsymbol{\nu} = [\nu_x, \nu_y]^T$  del proyector genera un rayo de luz que ilumina un punto  $\boldsymbol{p}$  del espacio 3D, y que este es observado por la cámara en el pixel  $\boldsymbol{\mu} = [\mu_x, \mu_y]^T$ , como se muestra en la fig. 2.7. Asumiendo que conocemos las coordenadas pixel de los puntos  $\boldsymbol{\mu}$  y  $\boldsymbol{\nu}$  en la cámara y el proyector, respectivamente, el punto  $\boldsymbol{p}$  del espacio 3D se obtiene a través de un proceso de triangulación. En la presente sección, se describe el método de triangulación usado en este trabajo. En particular, el método de triangulación empleado tiene la característica de requerir solo una de las dos componentes de las coordenadas pixel  $\boldsymbol{\nu}$  en el proyector. Esta característica del método de triangulación es de gran importancia porque reduce a la mitad el número de imágenes a procesar. Este método de triangulación fue parte del contenido publicado en el artículo [32].

La fig. 2.7 ilustra el proceso de triangulación cuando solo una componente del punto  $\boldsymbol{\nu}$  en el proyector es conocida. Debido a que solamente se está proyectando un eje del plano diapositiva,  $\boldsymbol{p}$  se calcula como la intersección de la línea  $\boldsymbol{\ell}$  (que representa el rayo de luz detectado por la cámara) y el plano  $h$  (que representa el plano de luz generado por el proyector a través de encender todos los pixeles con coordenadas  $\nu_x$ ). Los algoritmos se realizaron suponiendo que los dispositivos del perfilómetro se pueden representar usando el modelo pinhole, en el cual no se considera distorsión radial introducida por las lentes de los dispositivos [33, 29]. A continuación, se presenta una descripción del algoritmo de triangulación implementado.

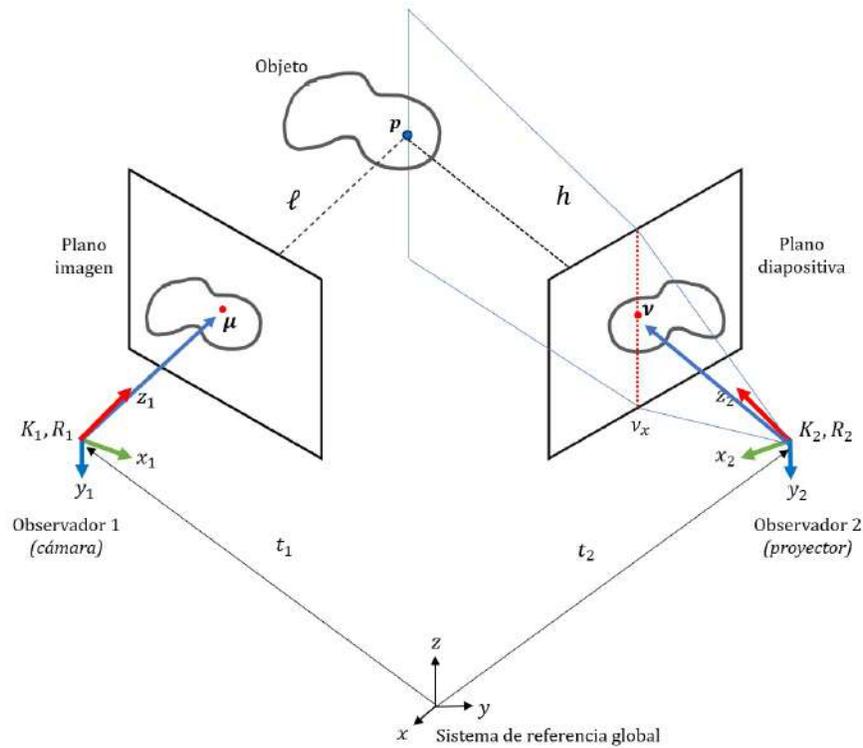


Figura 2.7: Problema de triangulación cuando solamente se conocen las dos componentes del punto  $\nu$  (generando un rayo de luz) o cuando solo se conoce la componente  $\nu_x$  (generando un plano de luz que ilumina el objeto).

### 2.5.1. Algoritmos de triangulación

#### Distancia mínima línea-punto-plano

Este método propone estimar  $p$  a partir de minimizar la distancia al cuadrado entre la línea dada por

$$\ell = t_1 + \lambda b, \quad (2.79)$$

y los puntos 3D del plano generado a partir de la coordenada  $\nu_x$

$$g^T(h - t_2) = 0; \quad (2.80)$$

donde  $\lambda$  es un factor de escala,  $b = \mathbf{R}K^{-1}\mathcal{H}[\mu]$  es la dirección del rayo de luz  $\ell$  capturado por la cámara y  $g$  es la normal del plano de luz generado por el

proyector, dada por

$$\mathbf{g} = RK^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\nu_x \end{bmatrix}^T. \quad (2.81)$$

Considerando que la distancia  $\mathbf{r}$  al cuadrado entre un el punto  $\mathbf{p}$  y la línea esta dada por

$$\|\mathbf{r}\| = (\mathbf{p} - \mathbf{t}_1)^T D(\mathbf{p} - \mathbf{t}_1), \quad (2.82)$$

y que la distancia al cuadrado entre el punto  $\mathbf{p}$  y el plano se estima como

$$\left( \frac{\mathbf{g}^T(\mathbf{p} - \mathbf{t}_2)}{\|\mathbf{g}\|} \right)^2 = \frac{1}{\mathbf{g}^T \mathbf{g}} (\mathbf{p} - \mathbf{t}_2)^T \mathbf{g} \mathbf{g}^T (\mathbf{p} - \mathbf{t}_2), \quad (2.83)$$

entonces el punto de la escena  $\mathbf{p}$  se calcula minimizando la expresión

$$Q(\mathbf{p}) = (\mathbf{p} - \mathbf{t}_1)^T D(\mathbf{p} - \mathbf{t}_1) + (\mathbf{p} - \mathbf{t}_2)^T G(\mathbf{p} - \mathbf{t}_2), \quad (2.84)$$

donde

$$G = \frac{\mathbf{g} \mathbf{g}^T}{\mathbf{g}^T \mathbf{g}} \quad (2.85)$$

y

$$D = I_3 - \frac{\mathbf{b} \mathbf{b}^T}{\mathbf{b}^T \mathbf{b}}, \quad (2.86)$$

siendo  $I_3$  la matriz identidad de  $3 \times 3$ . Por lo tanto, al resolver  $\partial Q(\mathbf{p})/\partial \mathbf{p} = \mathbf{0}_3$  el punto de la escena observada se estima como

$$\mathbf{p} = (D + G)^{-1} (D\mathbf{t}_1 + G\mathbf{t}_2). \quad (2.87)$$

# Capítulo 3

## Evaluación de la demodulación de fase

### 3.1. Simulación de la demodulación de fase

La evaluación por simulación se realizó utilizando Matlab 2021b en una computadora con procesador Intel Core i5-7300HQ y 16 GB de RAM. Para evaluar la exactitud y robustez del proceso de demodulación de fase, se generaron 3 patrones de franjas, de  $500 \times 500$  pixeles según la Eq. (2.19), a partir de las funciones de fase

$$\phi_1(x, y) = peaks(x, y), \quad (3.1)$$

$$\phi_2(x, y) = \begin{cases} v(x, y) & 0 < v(x, y) < 4, \\ 4 & v(x, y) > 4, \\ 0 & v(x, y) < 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\phi_3(x, y) = \begin{cases} 0 & x^2 + y^2 > 0.75, \\ 50\sqrt{1 - x^2 - y^2} - 25 & \text{de otra manera,} \end{cases} \quad (3.3)$$

donde  $peaks(.)$  es la función picos de Matlab y

$$v(x, y) = 4 \cos(3\pi x) + 4 \cos(3\pi y); \quad (3.4)$$

considerando que la luz de fondo  $a(x, y)$  y la amplitud  $b(x, y)$  están dadas por

$$a(x, y) = 160 - 15x - 36x^2 - 15y - 36y^2, \quad (3.5)$$

$$b(x, y) = 15 + 8x + 35x^2 - x^3 - 30x^4 + 13y + 35y^2 - y^3 - 30y^4. \quad (3.6)$$

Dado que mientras más separado esté el espectro de primer orden del de orden cero incrementa la exactitud del proceso, las frecuencias portadoras se eligieron de tal forma que ambos espectros estuvieran cerca. Es decir, los algoritmos de demodulación de fase se evaluaron en el caso más difícil. Por lo tanto, las frecuencias portadoras  $f_{x0}$  y  $f_{y0}$  de los patrones generados se estimaron según las Eqs. (2.20),(2.21); considerando en cada caso a  $\theta = 0^\circ$  y a  $f = 40$ . Las funciones de fase, las imágenes resultantes y los respectivos espectros de frecuencias se observan en la fig. 3.1.

### 3.1.1. Evaluación de precisión

En la evaluación de la precisión del proceso de demodulación de fase, la fase envuelta se obtuvo utilizando el método de Fourier y el espectro de primer orden fue filtrado con cada una de las ventanas descritas en la sección 2.2.3 con las especificaciones de la tabla 3.1. Posteriormente, la fase envuelta obtenida se desarrolló con 4 diferentes algoritmos, dos de ellos son motivo de estudio en el presente trabajo 2.3 y se compararon con los propuestos es [1], [2]. Dado que

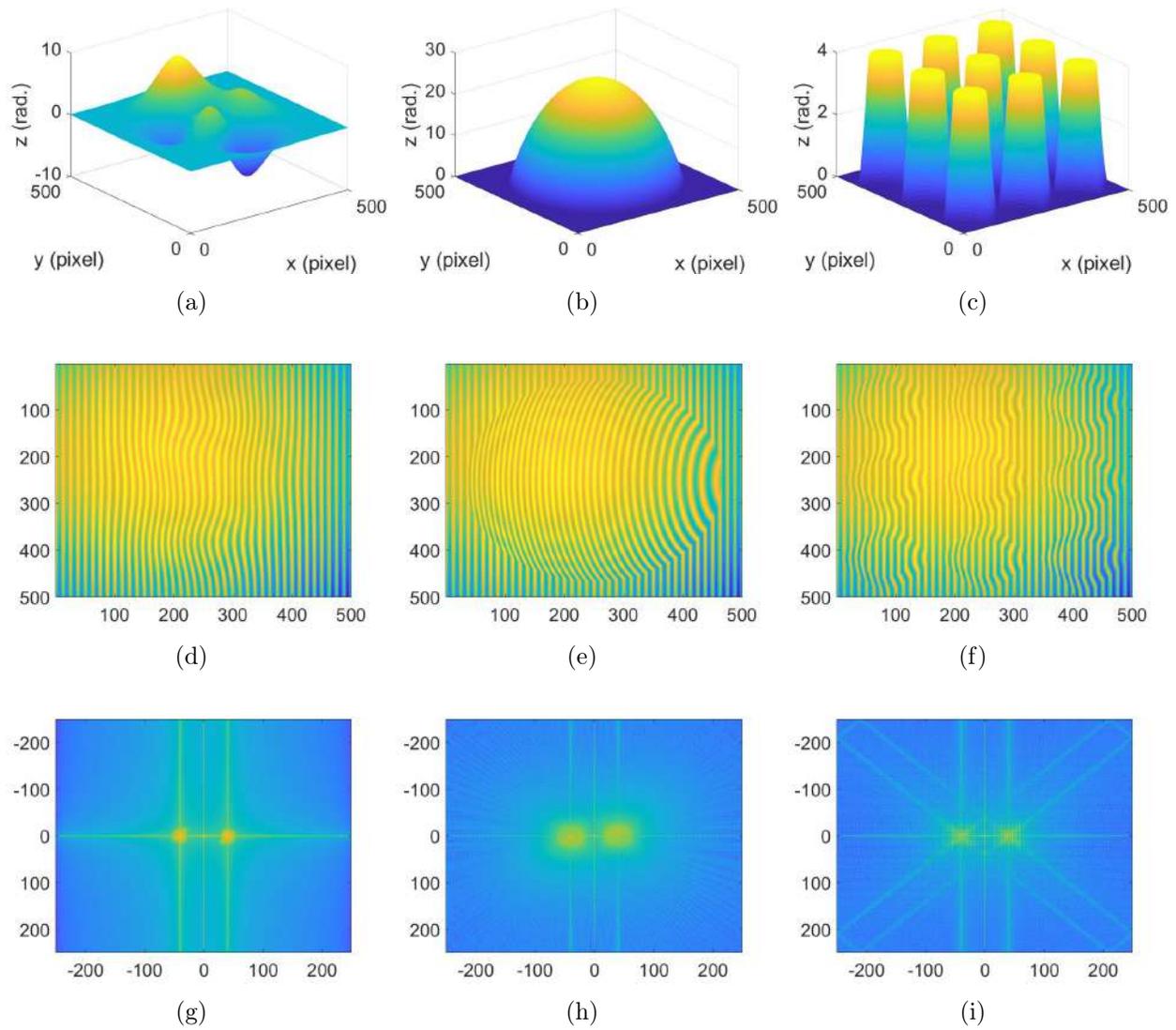


Figura 3.1: (a)-(c) Funciones de fase propuestas, con las cuales se generan sus respectivos patrones de franjas (d)-(f). En (g)-(i) se observa la representación en el dominio de la frecuencia de los patrones de franjas generados.

se conocen las funciones de fase exactas, se estimó el error cuadrático medio (RMS) y la desviación estándar del error respecto de las fases obtenidas con cada algoritmo de desenvolvimiento, los cuales se muestran en las figs. 3.2, 3.3, 3.4, respectivamente.

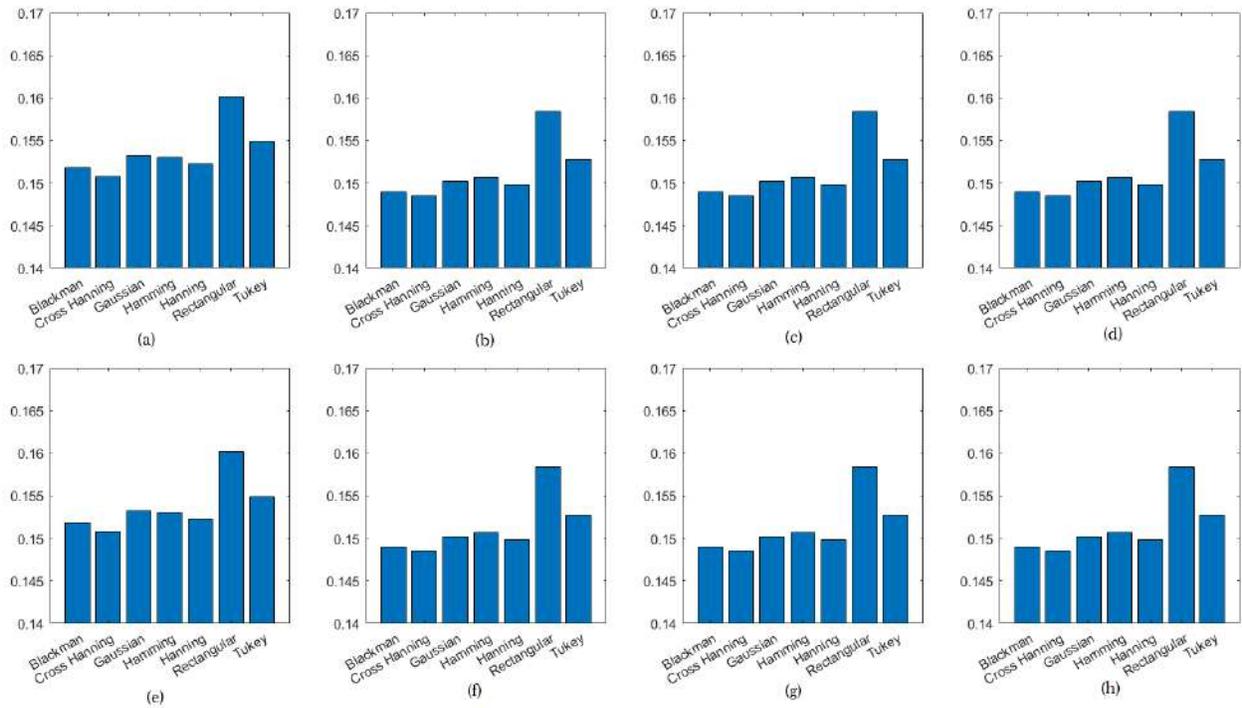


Figura 3.2: Errores de la demodulación de la primer función de fase  $\phi_1$ . En la primer fila se muestran los errores RMS, mientras que en la segunda la desviación estándar de los errores, según los algoritmos de desenvolvimiento del método de fourier (a)(e), redondeo de mínimos cuadrados (b)(f), desenvolvimiento de campo completo [1] (c)(g) y desenvolvimiento basado en la ecuación de transporte de intensidad [2] (d)(h).

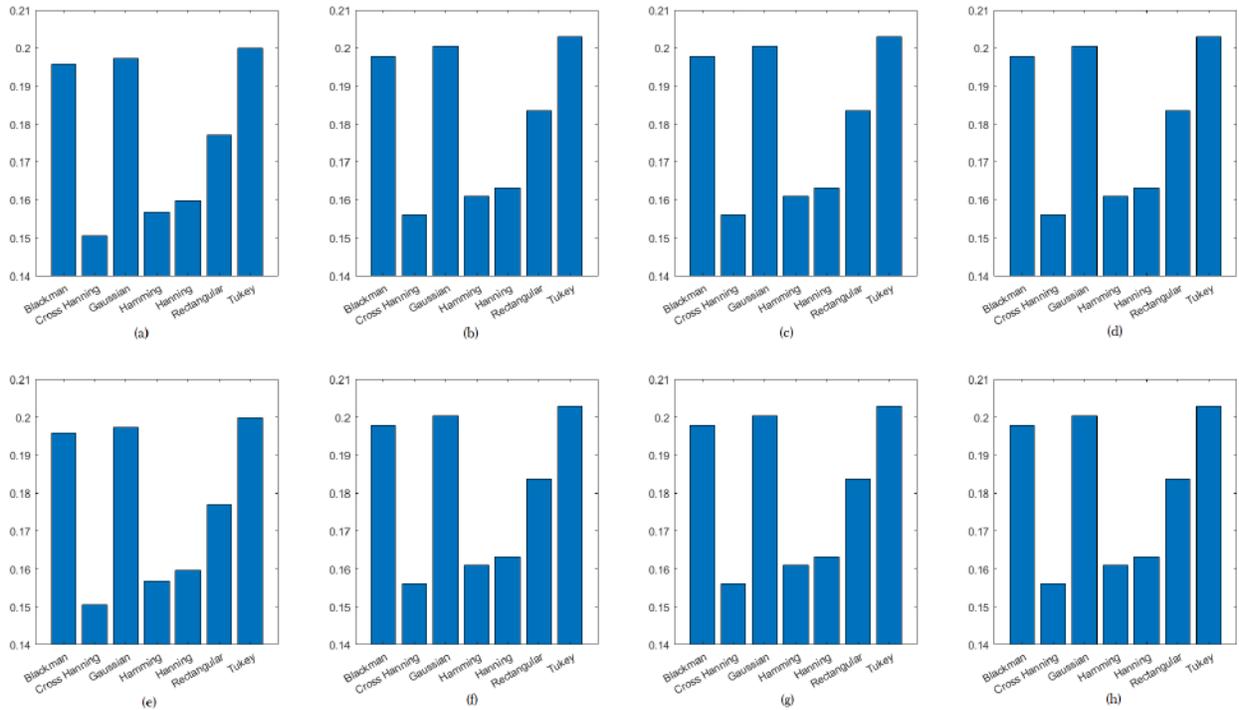


Figura 3.3: Errores de la demodulación de la segunda función de fase  $\phi_2$ . En la primer fila se muestran los errores RMS, mientras que en la segunda la desviación estándar de los errores, según los algoritmos de desenvolvimiento del método de fourier (a)(e), redondeo de mínimos cuadrados (b)(f), desenvolvimiento de campo completo [1] (c)(g) y desenvolvimiento basado en la ecuación de transporte de intensidad [2] (d)(h).

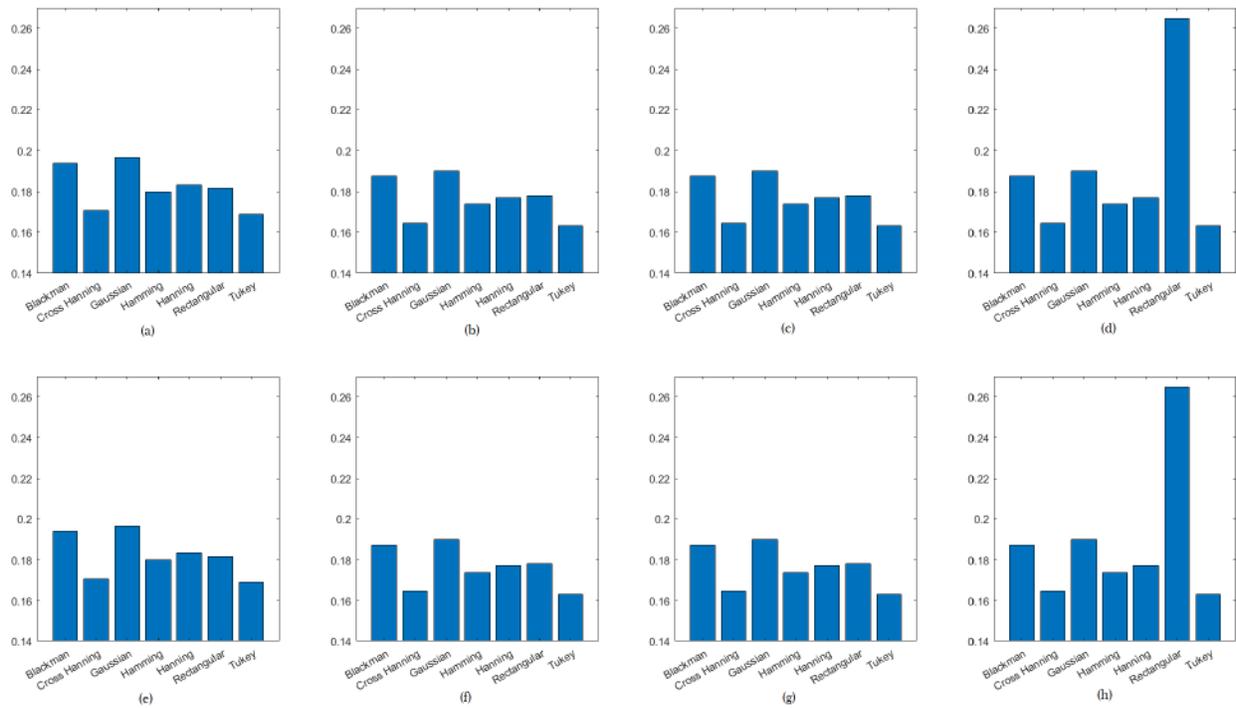


Figura 3.4: Errores de la demodulación de la tercer función de fase  $\phi_3$ . En la primer fila se muestran los errores RMS, mientras que en la segunda la desviación estándar de los errores, según los algoritmos de desenvolvimiento del método de fourier (a)(e), redondeo de mínimos cuadrados (b)(f), desenvolvimiento de campo completo [1] (c)(g) y desenvolvimiento basado en la ecuación de transporte de intensidad [2] (d)(h).

	Especificaciones		
Filtro	$\phi_1$	$\phi_2$	$\phi_3$
Hanning	$m_1 = 0.85f$		
Hamming	$m_2 = 0.85f$		
Cross Hanning	$m_3 = 0.85, k_1 = k_2 = 2$		
Blackman	$m_4 = 0.85f$		
Gaussian	$\sigma_x = \sigma_y = 10$	$\sigma_x = \sigma_y = 12$	$\sigma_x = \sigma_y = 11$
Rectangular	$s_x = s_y = 20$	$s_x = s_y = 25$	$s_x = 30, s_y = 50$
Tukey	$s_x = s_y = 20, \lambda = 0.4$	$s_x = s_y = 25, \lambda = 0.4$	$s_x = 30, s_y = 50, \lambda = 0.4$

Tabla 3.1: Especificaciones de los filtros utilizado en las evaluaciones por simulación del proceso de demodulación de fase.

### 3.1.2. Robustez

La robustez al ruido del proceso de demodulación de fase se estimó al agregar ruido gaussiano, de media cero con distintos valores de varianza  $\sigma$ , a los patrones de franjas de la segunda fila de la fig. 3.1. El error cuadrático medio de la función de fase recuperada en cada nivel de ruido se observa en las gráficas de las figs. 3.5, 3.6 y 3.7.

### 3.1.3. Tiempo de procesamiento

Analizando los resultados de las pruebas previas a los métodos de desenvolvimiento espaciales, se puede notar que aquellos con menor error RMS son el método por transformada de Fourier y el Rounding least-squares. Por lo cual, se procedió a evaluar su tiempo de procesamiento mediante simulación en el software Matlab 2021b en una computadora con procesador Intel Core i5-7300HQ y 16 GB de RAM. Para ello, se construyeron funciones de fase de la forma

$$\phi(x, y) = 4\text{peaks}(6X - 3, 6Y - 3), \quad (3.7)$$

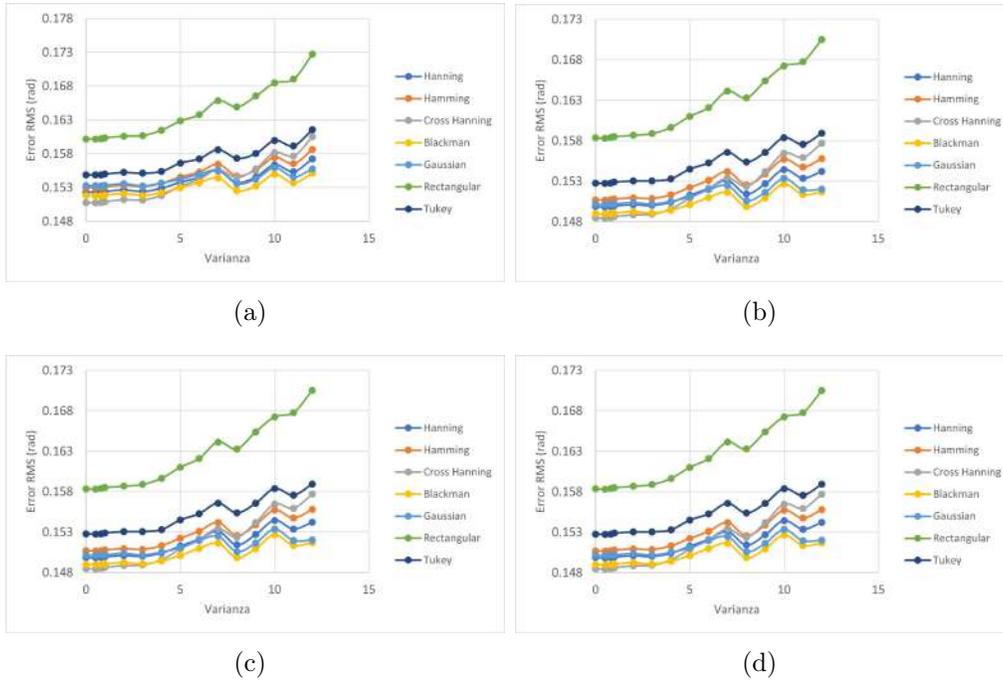


Figura 3.5: Resultados de la prueba de robustez de la primer función de fase  $\phi_1$  con los algoritmos de desenvolvemento de Fourier (a), redondeo de mínimos cuadrados (b), campo completo (c) y el basado en la ecuación de transporte de intensidad (d).

donde  $\text{peaks}(\cdot)$  es la función picos de Matlab,  $X$  y  $Y$  son matrices de  $N \times N$  píxeles, donde  $N$  iba aumentando de 200 a 2400 píxeles. Dado que se va a evaluar el tiempo de procesamiento de los algoritmos de desenvolvemento de fase, empleando el operador de envolvemento A.5 se obtuvo la fase envuelta de entrada, obsérvese la fig. 3.8. Los resultados de la evaluación se muestran en la gráfica de la fig. 3.9.

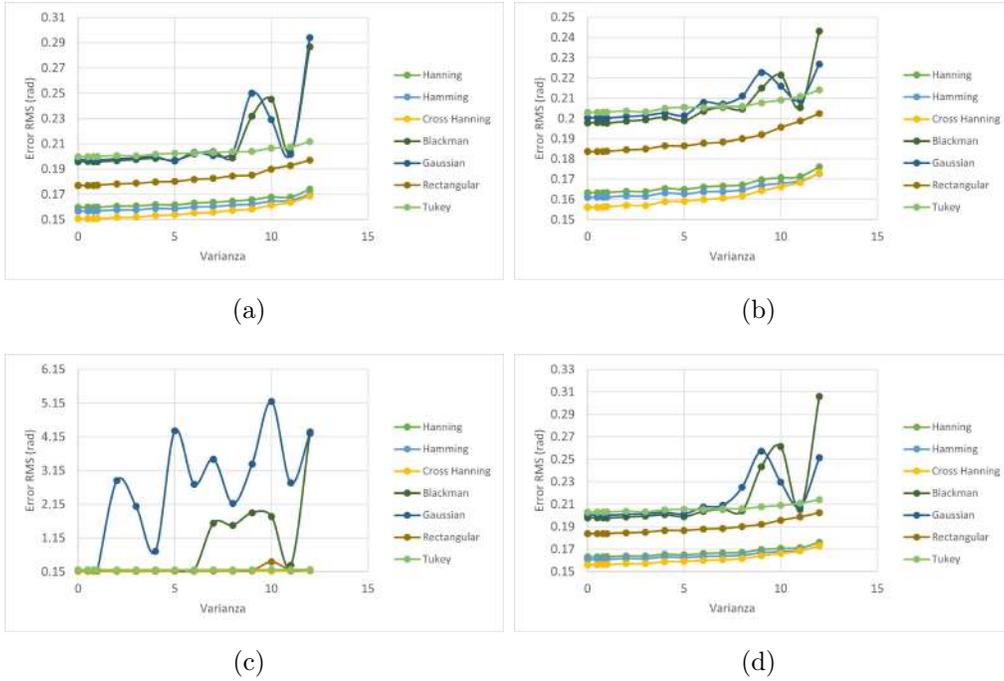


Figura 3.6: Resultados de la prueba de robustez de la segunda función de fase  $\phi_2$  con los algoritmos de desenvolvimiento de Fourier (a), redondeo de mínimos cuadrados (b), campo completo (c) y el basado en la ecuación de transporte de intensidad (d).

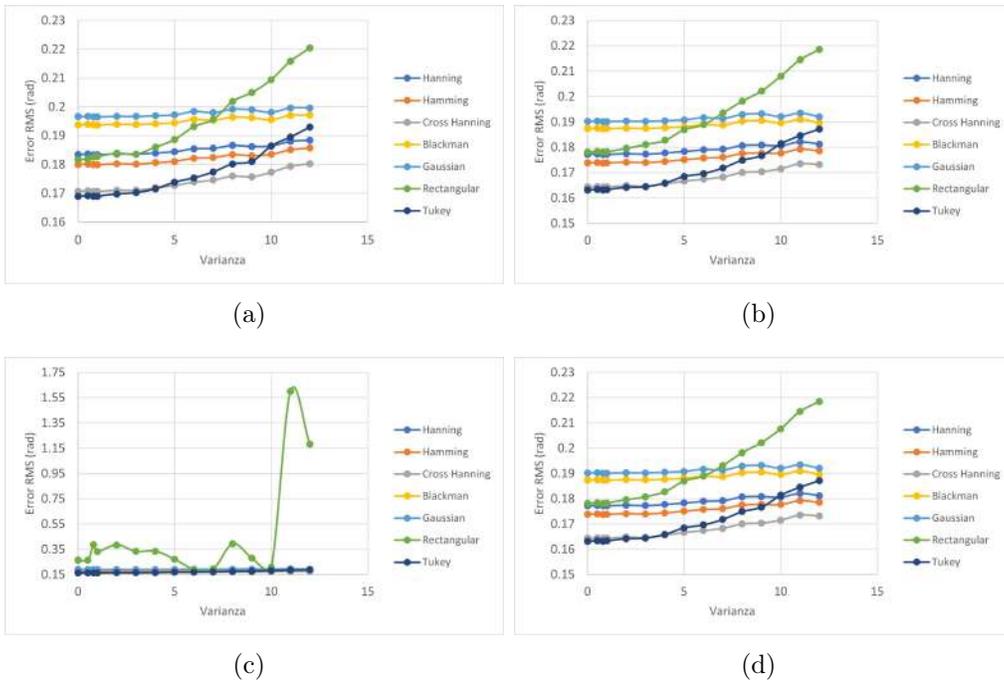


Figura 3.7: Resultados de la prueba de robustez de la tercer función de fase  $\phi_3$  con los algoritmos de desenvolvimiento de Fourier (a), redondeo de mínimos cuadrados (b), campo completo (c) y el basado en la ecuación de transporte de intensidad (d).

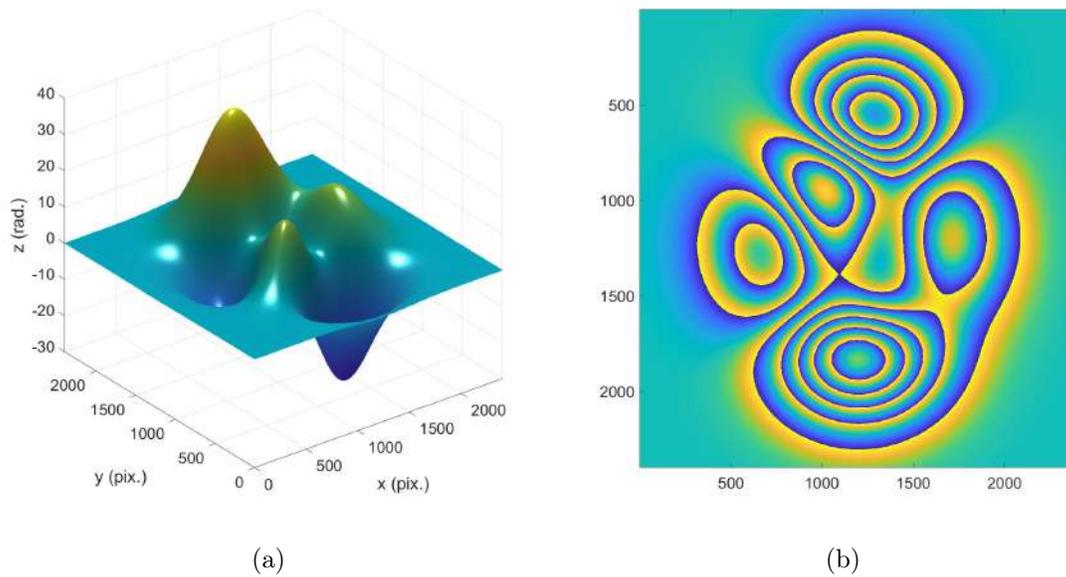


Figura 3.8: En (a) se aprecia la función de fase cuando  $N = 2400$  pixeles, mientras que en (b) su correspondiente fase envuelta.

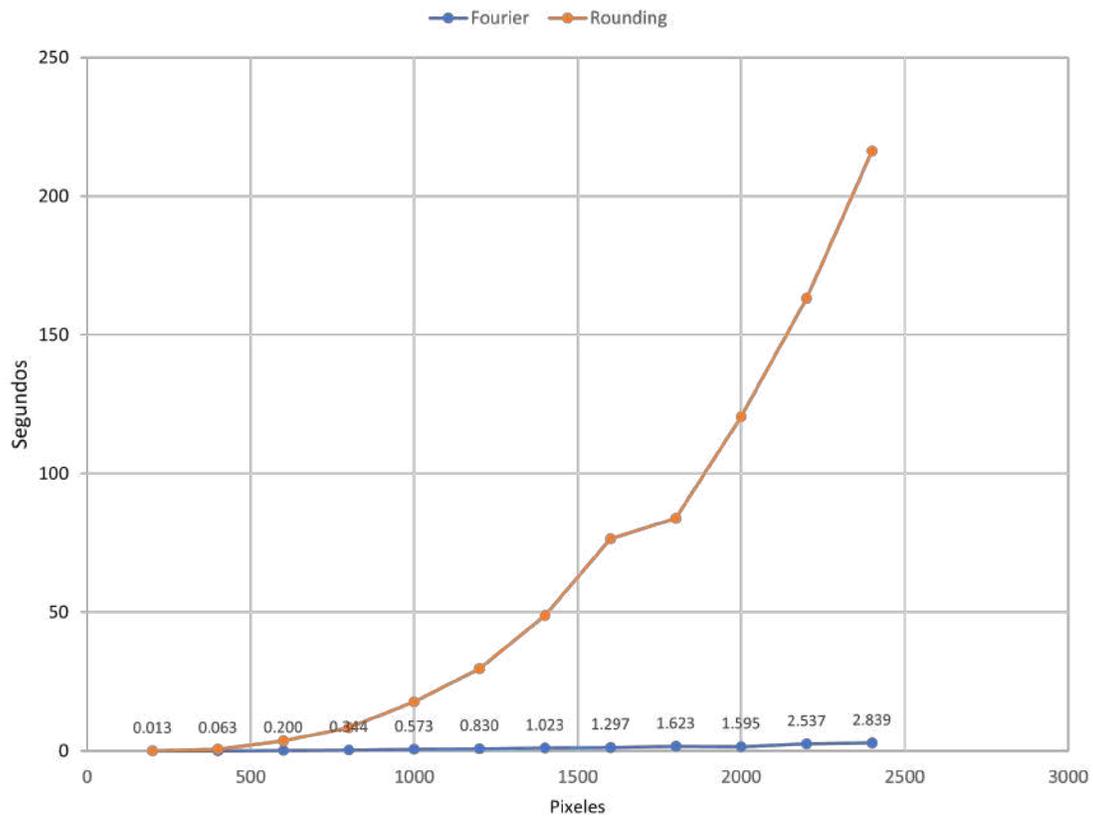


Figura 3.9: Resultados de la evaluación del tiempo de procesamiento de los algoritmos de desenvolvimiento por transformada de Fourier y Rounding least-squares.

# Capítulo 4

## Evaluación de la digitalización tridimensional

### 4.1. Comparación experimental de digitalización

Para la comparación experimental del proceso de digitalización entre la demodulación, se calibró una cámara (UI-3880CP de  $3088 \times 2076$  píxeles y longitud focal de 6mm) y un proyector (Kodak Luma 150 de  $720 \times 1280$  píxeles) según el método de la sección 2.4.3. Los parámetros intrínsecos y extrínsecos del sistema cámara-proyector obtenidos se muestran en la tabla 4.1.

	Intrínsecos						
	$k_{11}$	$k_{12}$	$k_{13}$	$k_{22}$	$k_{23}$	$k_{33}$	
Camera	2.2285	-0.0031	0.0045	2.2297	-0.0228	1	
Proyector	3.3608	0.0023	-0.0493	3.3382	0.5534	1	
	Extrínsecos						
	$\ell_1$	$\ell_2$	$\ell_3$	$\gamma$	$t_x$	$t_y$	$t_z$
Camera	0.3430	-0.9382	0.0462	0.3095	138.25	76.47	189.58
Proyector	0.8987	-0.4146	0.1431	0.0744	83.85	27.07	275.86

Tabla 4.1: Parámetros intrínsecos y extrínsecos del sistema cámara-proyector experimental. La matriz de rotación está dada en la notación de Rodruigues, donde el eje de rotación está en coordenadas polares; mientras que el vector de traslación está en milímetros.

Seguidamente, se proyectó sobre la escena 4 conjuntos de rejillas  $G_x$  con 10 corrimientos de fase y  $\alpha = 4.7425$ , y una rejilla con frecuencia portadora según la ecuación (2.19) con  $f_x = 100$  y  $f_y = 0$ . La fase envuelta del conjunto de rejillas con más alta frecuencia  $G_x$  se muestra en la fig. 4.1(a), mientras que la fase envuelta obtenida por el método de Fourier se observa en la fig. 4.1(b). Considerando la evaluación de los filtros de la sección 3.1, para el método de obtención de fase envuelta por el método de Fourier se utilizó el filtro *Cross-shaped Hanning* centrado en  $f_{x0} = 120$ ,  $f_{y0} = 0$  y  $m = 108$ . En la fig. 4.2 se aprecia el espectro de primer orden filtrado.

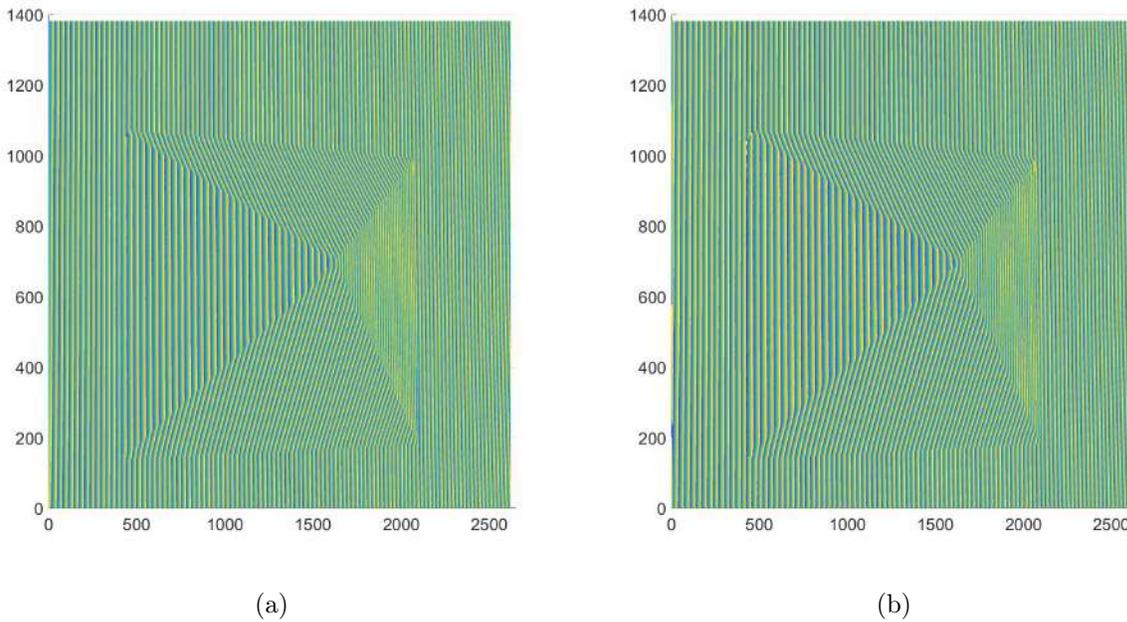


Figura 4.1: Fases envueltas obtenidas con (a) el método temporal de n-pasos y (b) el método espacial por transformada de Fourier.

Teniendo las fases envueltas de las rejillas  $G_x$ , se estimó la fase envuelta con el algoritmo descrito en la sección 2.3.1. En el caso de la fase envuelta obtenida por el método de Fourier, se compararon los métodos de desenvolvimiento por transformada de Fourier, Rounding least-squares, campo completo y el basa-

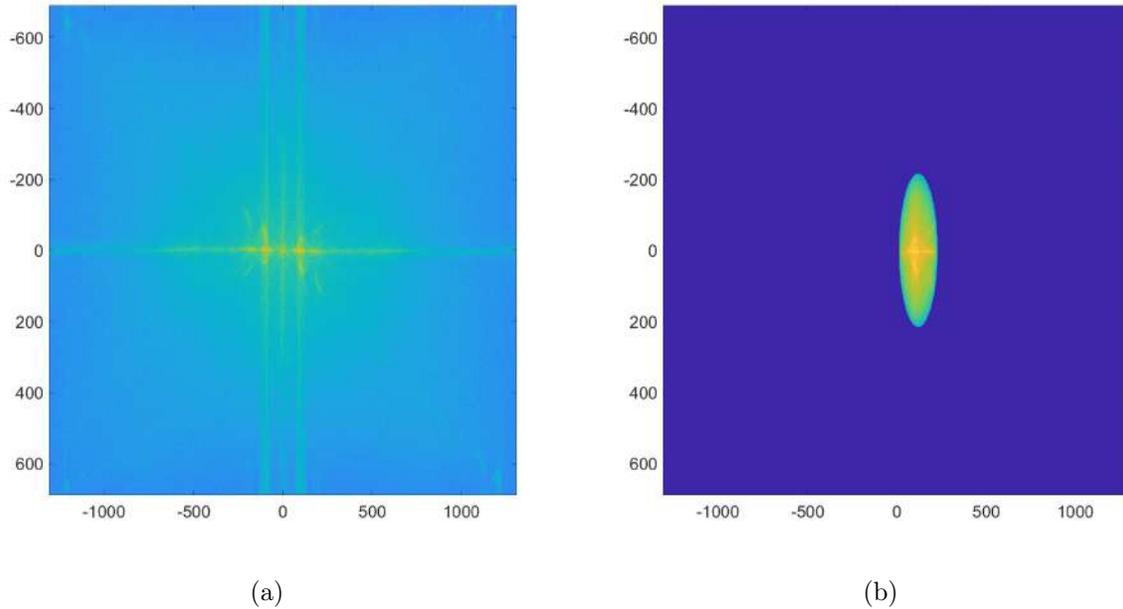


Figura 4.2: En (a) se muestra el espectro de frecuencias del patrón de franjas utilizado para demodular fase por el método de Fourier, mientras que en (b) se muestra el espectro de primer orden filtrado.

do en la ecuación de transporte de intensidad. Las coordenadas de un eje del plano diapositiva  $\nu_x$  recuperadas por el método temporal y los métodos de desenvolvimiento espacial se muestran en la figura 4.3. Los errores absolutos de los métodos de desenvolvimiento espacial se estimaron al contrastar con las coordenadas obtenidas por el desenvolvimiento temporal, los resultados se aprecian en la fig 4.4.

Finalmente, considerando los parámetros de los dispositivos del perfilómetro experimental (tabla 4.1) y el algoritmo de triangulación descrito en la sección 2.5.1, se obtienen los objetos tridimensional de la fig. 4.5. Dado que el método temporal es más robusto que los espaciales, los errores absolutos en la digitalización se compararon con el objeto obtenido demodulando fase con el método temporal, obsérvese la fig. 4.6.

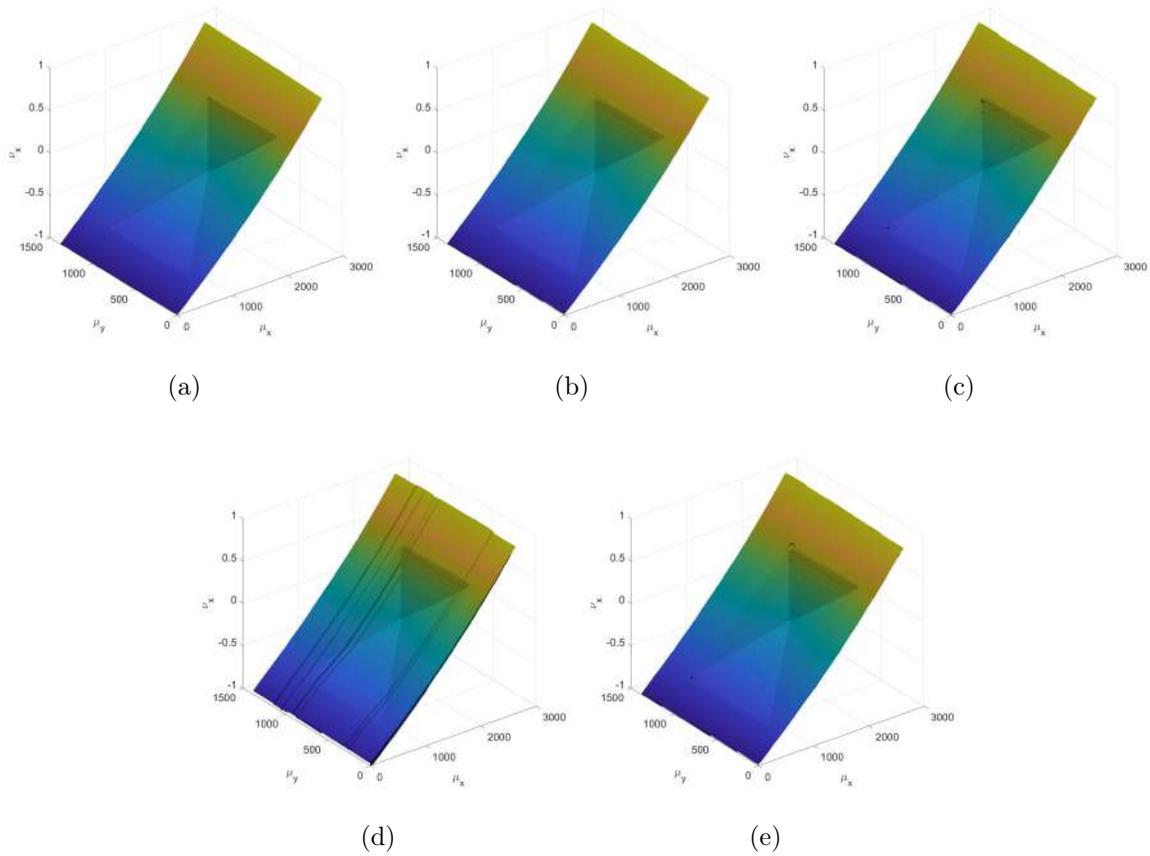


Figura 4.3: Coordenadas del plano diapositiva  $\nu_x$  recuperadas a partir de las fases desenvueltas estimadas por los métodos de desenvolvimiento por (a) multifrecuencia, (b) transformada de Fourier, (c) Rounding least-squares, (d) Campo completo y (e) el basado en la ecuación de transporte de intensidad.

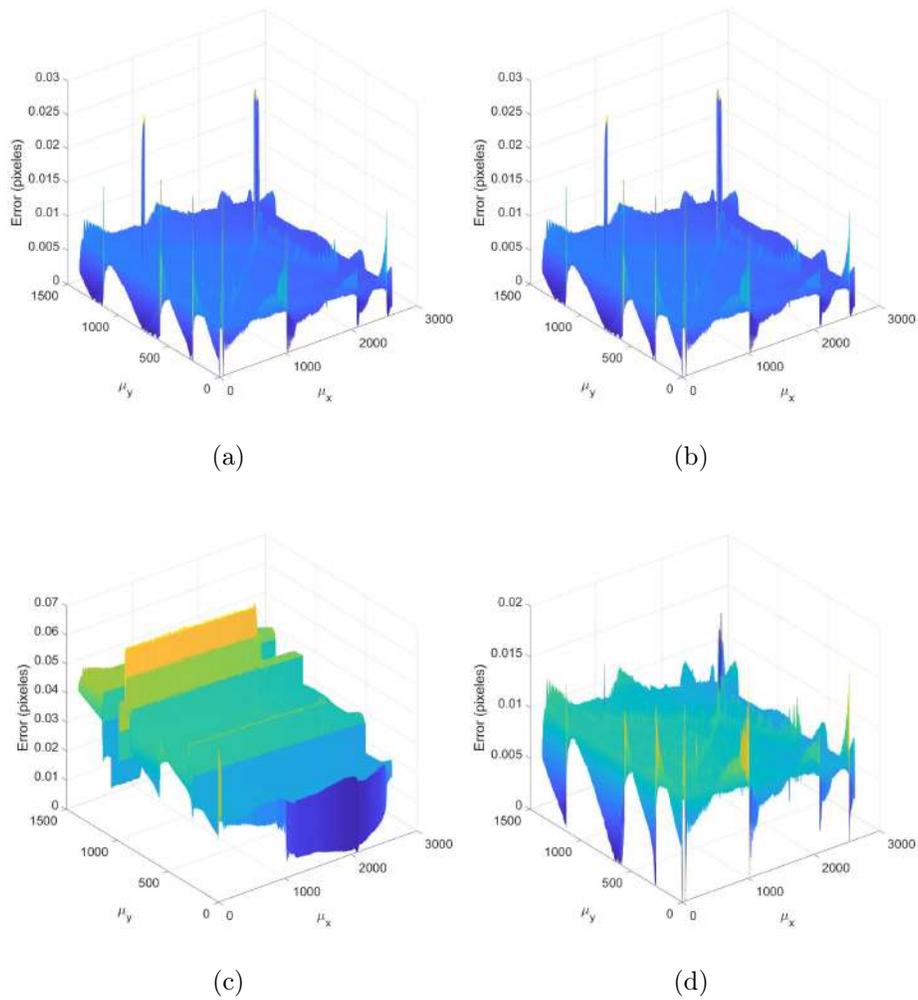


Figura 4.4: Errores absolutos en la recuperación de las coordenadas del plano diapositiva  $\nu_x$  a partir de las fases desenvueltas estimadas por los métodos de desenvolvimento por (a) transformada de Fourier, (b) Rounding least-squares, (c) Campo completo y (d) el basado en la ecuación de transporte de intensidad.

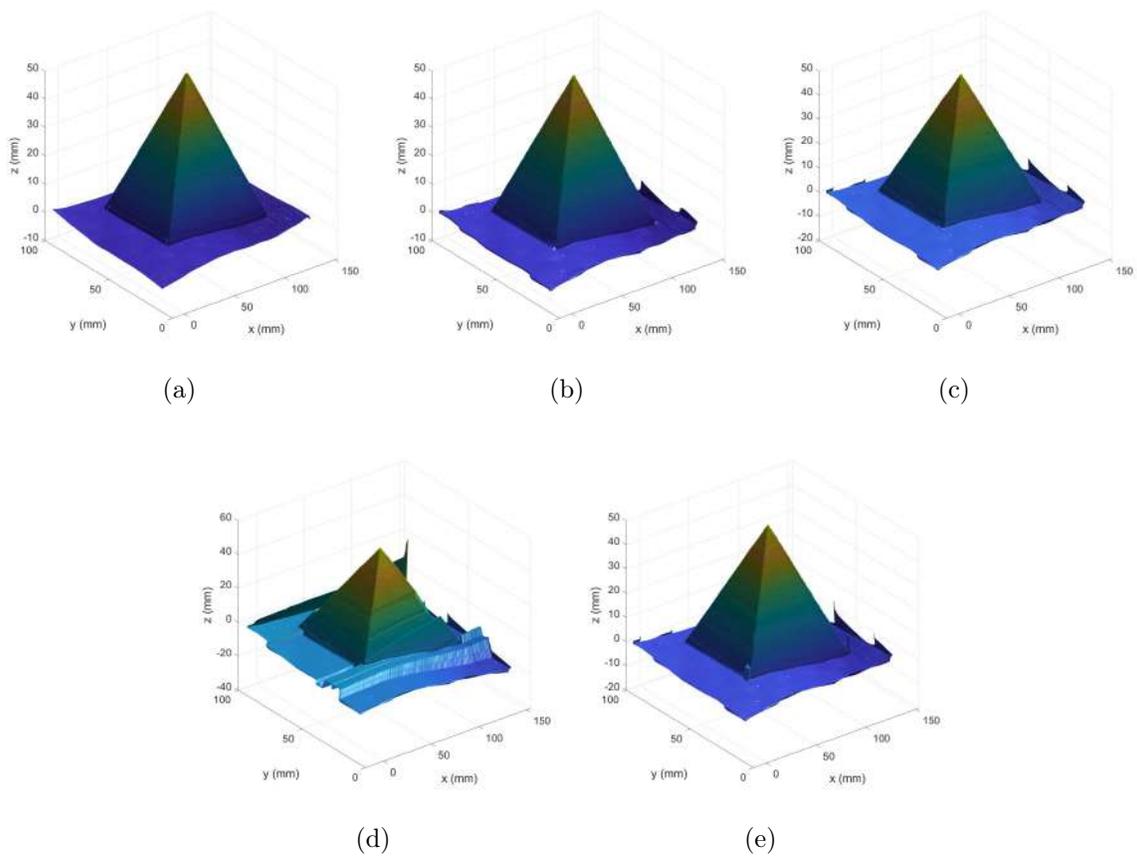
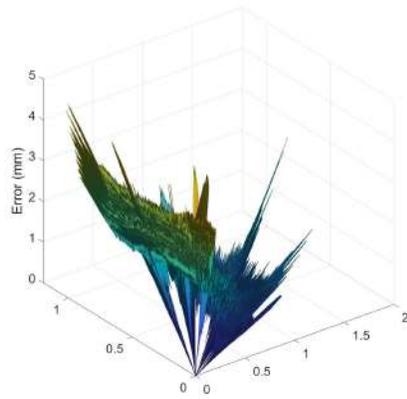
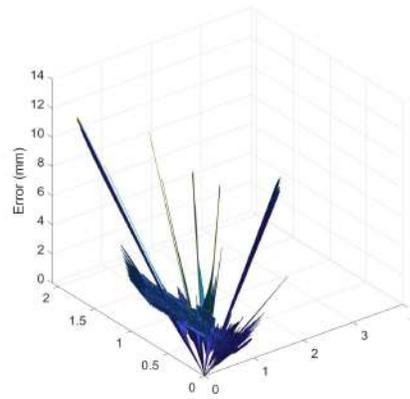


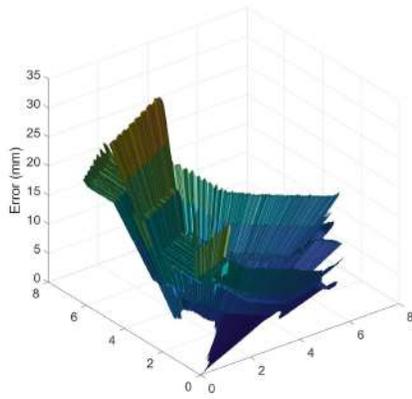
Figura 4.5: Objeto digitalizado empleando los métodos de desenvolvimiento por (a) multifrecuencia, (b) transformada de Fourier, (c) Rounding least-squares, (d) Campo completo y (e) el basado en la ecuación de transporte de intensidad.



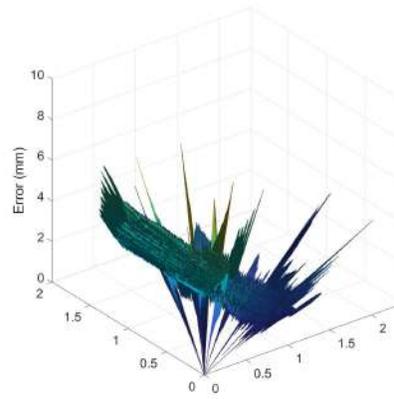
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4.6: Errores en el objeto digitalizado empleando los métodos de desenvolvimiento por (a) transformada de Fourier, (b) Rounding least-squares, (c) Campo completo y (d) el basado en la ecuación de transporte de intensidad.

# Capítulo 5

## Conclusiones

A pesar de que los métodos temporales (*Phase-Shifting*) posean una alta precisión y robustez al ruido ambiental, estos tienen la gran desventaja de requerir proyectar múltiples patrones de franjas para obtener fase. Por ende, en aplicaciones de digitalización dinámica resulta un inconveniente. Por el contrario, la demodulación de fase con métodos espaciales, como el de la transformada de Fourier, requieren únicamente un único patrón de franjas. Sin embargo, su implementación es necesario saber adecuar cada parte del proceso para un resultado óptimo. En el presente trabajo de tesis se analizaron todos los aspectos que intervienen en la demodulación de fase utilizando la transformada de Fourier, para posteriormente realizar una adecuada digitalización de la escena observada. A continuación, se enumeran las conclusiones de este trabajo.

- Se analizó el proceso de obtención de fase envuelta por el método de Fourier. En este proceso, la parte crucial resulta en el adecuado aislamiento de los espectros de primer orden, puesto que esto garantiza la calidad de la fase envuelta a estimar. En el presente trabajó se compararon los 7 filtros de ventana más comunes en la literatura, pudiendo evaluar su precisión

y robustez al ruido. Para ello, se propusieron 3 funciones de fase y se generaron patrones de imágenes  $I(x, y)$  mediante simulación. Los resultados muestran que el filtro *Cross-shaped Hanning* es el más robusto y preciso para aislar el espectro de primer orden.

- Una vez que se obtuvo la fase envuelta, se compararon 4 métodos de desenvolvimiento espaciales: por transformada de Fourier [28], Rounding least-squares [27], de campo completo [1] y el basado en la ecuación de transporte de intensidad [2]. Analizando los resultados obtenidos en las pruebas en simulación y experimentales, se determinó que el desenvolvimiento de fase por el método de Fourier fue el más preciso y a la vez con menos costo computacional.
- Se construyó un perfilómetro experimental con uná cámara y un proyector, los cuales se calibraron utilizando el modelo pinhole y el método de calibración simultánea [31]; con el cual se digitalizó objeto continuo con el método espacial y el temporal. Los resultados mostraron que el método temporal fue el más robusto, sin embargo se procesaron 48 patrones de franjas. Por el contrario, también se observó que el modelo tridimensional con menor error al procesar un único patrón de franjas corresponde al calculado cuando se demodula fase utilizando la transformada de Fourier. Por lo cual, se concluye que el implementar la transformada de Fourier tanto para obtener fase como para el proceso de desenvolvimiento, es la mejor alternativa cuando la superficie a reconstruir es dinámica y no presenta discontinuidades.

# Apéndice A

## Preliminares matemáticos

### A.1. Operador homogéneo

A diferencia de un vector  $\mathbf{a} \in R^n$  expresado en coordenadas cartesianas, se puede representar en coordenadas homogéneas a partir del operador  $\mathcal{H}_s$  como

$$\mathbf{a} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \mathcal{H}_s[\mathbf{a}] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ s \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

donde  $s$  es un factor de escala, cuando  $s = 1$  se omite el subíndice del operador homogéneo ( $\mathcal{H}$ ). De esta forma se puede decir que un vector cualquiera  $n$ -dimensional expresado en coordenadas cartesianas, adquiere una dimensión adicional cuando se pasa al espacio de las coordenadas homogéneas.

## A.2. Operador homogéneo inverso

El operador homogéneo inverso  $\mathcal{H}_s^{-1}$  tiene como entrada un vector expresado en coordenadas homogéneas y lo transforma a su correspondiente en coordenadas cartesianas. Este está definido como

$$\mathcal{H}_s^{-1}[\mathbf{a}] = \frac{s}{\mathcal{S}[\mathbf{a}]} \mathcal{H}_0^{-1}[\mathbf{a}], \quad (\text{A.2})$$

donde  $s$  es el factor de escala,  $\mathcal{S}[\cdot]$  es un operador que devuelve la última componente del vector de entrada, y  $\mathcal{H}_0^{-1}$  es un operador que devuelve el vector de entrada excepto su última componente.

## A.3. Operador *floor*

Dado un número decimal arbitrario  $x$ , el operador floor devuelve el entero menor más próximo. Es decir

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}, \quad (\text{A.3})$$

donde  $\max\{\cdot\}$  es un operador que devuelve el máximo valor dentro de un conjunto,  $n$  es un número entero y  $\mathbb{Z}$  es el conjunto de todos los números enteros.

Las propiedades del operador  $\lfloor \cdot \rfloor$  más relevantes para el problema de desenvolvimiento de fase se presentan a continuación.

- La entrada es un número entero  $n$ ,

$$\lfloor n \rfloor = n. \quad (\text{A.4})$$

- La entrada es la suma de un número decimal  $x$  y un entero  $n$ ,

$$\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n. \quad (\text{A.5})$$

## A.4. Operador modulo

El operador módulo, denotado por  $\text{mod}(a, b)$ , devuelve el residuo de la división entera de  $a$  entre  $b$ . Considerando que  $a$  se puede expresar como

$$a = nb + \text{mod}(a, b), \quad (\text{A.6})$$

donde  $n$  es un número entero; entonces

$$\frac{a}{b} = \frac{nb + \text{mod}(a, b)}{b} = n + \frac{\text{mod}(a, b)}{b}. \quad (\text{A.7})$$

Aplicando el operador floor a (A.7) se tiene que

$$\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor = \left\lfloor n + \frac{\text{mod}(a, b)}{b} \right\rfloor = n + \left\lfloor \frac{\text{mod}(a, b)}{b} \right\rfloor = n, \quad (\text{A.8})$$

puesto que

$$\frac{\text{mod}(a, b)}{b} < 1. \quad (\text{A.9})$$

Por lo tanto,  $\text{mod}(a, b)$  se puede definir a partir de (A.6) y (A.8) como

$$\text{mod}(a, b) = a - nb = a - b \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor, \quad (\text{A.10})$$

donde el residuo se encuentra en el intervalo  $[0, b)$ .

El operador  $\text{mod}(a, b)$  descrito en (A.10) posee la siguiente propiedad

$$\text{mod}(a + kb, b) = \text{mod}(a, b), \quad (\text{A.11})$$

cuando  $k$  sea un número entero.

## A.5. Operador de envolvimiento

El operador de envolvimiento  $\mathcal{W}[\cdot]$  de un número real  $x$  esta descrito como

$$\mathcal{W}[x] = \text{mod}(x + \pi, 2\pi) - \pi \quad (\text{A.12})$$

$$= x - 2\pi \left\lfloor \frac{x + \pi}{2\pi} \right\rfloor, \quad (\text{A.13})$$

donde  $\mathcal{W}[x] \in [-\pi, \pi)$ . Sus propiedades se enlistan a continuación, considerando que  $n$  es un número entero.

- $\mathcal{W}[x] = x$ , cuando  $x \in [-\pi, \pi)$ .
- $\mathcal{W}[x + 2\pi n] = \mathcal{W}[x]$ .

# Bibliografía

- [1] Zacarias Malacara and Manuel Servin. *Interferogram analysis for optical testing*. CRC press, 2018.
- [2] Zixin Zhao, Hangying Zhang, Zhaoxian Xiao, Hubing Du, Yiying Zhuang, Chen Fan, and Hong Zhao. Robust 2d phase unwrapping algorithm based on the transport of intensity equation. *Measurement Science and Technology*, 30(1):015201, 2018.
- [3] Juraj Ružbarský. *Contactless System for Measurement and Evaluation of Machined Surfaces*. Springer International Publishing, 2022.
- [4] Boguslaw Cyganek and J Paul Siebert. *An introduction to 3D computer vision techniques and algorithms*. John Wiley & Sons, 2011.
- [5] Tongxin Li, Yeqing Dong, and Xinxu Wang. Fourier transform profilometry using single-pixel detection based on two-dimensional discrete cosine transform. *Optics and Laser Technology*, 156, 12 2022.
- [6] Jason Geng. Structured-light 3d surface imaging: a tutorial. *Adv. Opt. Photon.*, 3(2):128–160, Jun 2011.

- [7] Song Zhang. *High-speed 3D imaging with digital fringe projection techniques*. CRC Press, 2018.
- [8] Mitsuo Takeda, Hideki Ina, and Seiji Kobayashi. Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry. *JosA*, 72(1):156–160, 1982.
- [9] Mitsuo Takeda and Kazuhiro Mutoh. Fourier transform profilometry for the automatic measurement of 3-d object shapes. *Applied optics*, 22(24):3977–3982, 1983.
- [10] Dennis C Ghiglia and Mark D Pritt. *Two-dimensional phase unwrapping: theory, algorithms, and software*. 1998.
- [11] Jianhua Wang, Yanxi Yang, and Yuguo Zhou. Dynamic three-dimensional surface reconstruction approach for continuously deformed objects. *IEEE Photonics Journal*, 13, 2 2021.
- [12] Qian Kemao. Carrier fringe pattern analysis: Links between methods. *Optics and Lasers in Engineering*, 150, 3 2022.
- [13] J.L Posdamer and M.D Altschuler. Surface measurement by space-encoded projected beam systems. *Computer Graphics and Image Processing*, 18(1):1–17, 1982.
- [14] G. Sansoni, S. Corini, S. Lazzari, R. Rodella, and F. Docchio. Three-dimensional imaging based on gray-code light projection: characterization of the measuring algorithm and development of a measuring system for industrial applications. *Appl. Opt.*, 36(19):4463–4472, Jul 1997.

- [15] K. L. Boyer and A. C. Kak. Color-encoded structured light for rapid active ranging. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-9(1):14–28, 1987.
- [16] Jordi Pagès, Joaquim Salvi, Christophe Collewet, and Josep Forest. Optimised de bruijn patterns for one-shot shape acquisition. *Image and Vision Computing*, 23(8):707–720, 2005.
- [17] Rigoberto Juarez-Salazar, Ceciibet Mendoza-Rodriguez, Jose E Hernandez-Beltran, and Carlos Robledo-Sanchez. How do phase-shifting algorithms work? *European Journal of Physics*, 39(6):065302, 2018.
- [18] Rigoberto Juarez-Salazar, Alejandra Giron, Juan Zheng, and Victor H Diaz-Ramirez. Key concepts for phase-to-coordinate conversion in fringe projection systems. *Applied optics*, 58(18):4828–4834, 2019.
- [19] Pramod Rastogi and Erwin Hack. *Phase estimation in optical interferometry*. CRC Press, 2014.
- [20] Xianyu Su and Wenjing Chen. Fourier transform profilometry:: a review. *Optics and Lasers in Engineering*, 35(5):263–284, 2001.
- [21] Liang-Chia Chen, Hsuan-Wei Ho, and Xuan-Loc Nguyen. Fourier transform profilometry (ftp) using an innovative band-pass filter for accurate 3-d surface reconstruction. *Optics and Lasers in Engineering*, 48(2):182–190, 2010.
- [22] S Palani. *Principles of Digital Signal Processing*. Springer Nature, 2022.

- [23] Tushar Kanti Roy and Monir Morshed. Performance analysis of low pass fir filters design using kaiser, gaussian and tukey window function methods. In *2013 2nd international conference on advances in electrical engineering (icaee)*, pages 1–6. IEEE, 2013.
- [24] Xiangjun Kong, Fuzhong Bai, Yongxiang Xu, and Ying Wang. Cross-shaped hanning filter used in fourier transform profilometry for accurate 3-d shape retrieval. *Journal of Modern Optics*, 68(17):936–944, 2021.
- [25] Yuan Guo, Xiaotian Chen, and Tao Zhang. Robust phase unwrapping algorithm based on least squares. *Optics and Lasers in Engineering*, 63:25–29, 2014.
- [26] Emanuele Zappa and G Busca. Comparison of eight unwrapping algorithms applied to fourier-transform profilometry. *Optics and Lasers in Engineering*, 46(2):106–116, 2008.
- [27] Rigoberto Juarez-Salazar, Carlos Robledo-Sanchez, and Fermin Guerrero-Sanchez. Phase-unwrapping algorithm by a rounding-least-squares approach. *Optical Engineering*, 53(2):024102–024102, 2014.
- [28] M.D. Pritt and J.S. Shipman. Least-squares two-dimensional phase unwrapping using fft’s. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 32(3):706–708, 1994.
- [29] Rigoberto Juarez-Salazar and Victor H. Diaz-Ramirez. Operator-based homogeneous coordinates: Application in camera document scanning. *Op-*

*tical Engineering*, 56(7), July 2017. Publisher Copyright: © 2017 Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE).

- [30] Rigoberto Juarez-Salazar, Juan Zheng, and Victor H. Diaz-Ramirez. Distorted pinhole camera modeling and calibration. *Appl. Opt.*, 59(36):11310–11318, Dec 2020.
- [31] Rigoberto Juarez-Salazar and Victor H. Diaz-Ramirez. Flexible camera-projector calibration using superposed color checkerboards. *Optics and Lasers in Engineering*, pages 59–65, September 2019.
- [32] Rigoberto Juarez-Salazar, Gustavo A. Rodriguez-Reveles, Sofia Esquivel-Hernandez, and Victor H. Diaz-Ramirez. Three-dimensional spatial point computation in fringe projection profilometry. *Optics and Lasers in Engineering*, 164:107482, 2023.
- [33] Richard Hartley and Andrew Zisserman. *Multiple View Geometry in Computer Vision*. Cambridge University Press, second edition, 2003.